MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

57. BAND 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 8. DEZEMBER 1952)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1952

Math. Z.

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Zürich/Schweiz, Hadlaubstraße 45,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41—45 Neal Street, London W.C.2.

---

57. Band — **Inhalt** — 1. Heft

Seite

Kreisel, G., Some concepts concerning formal systems of number theory 1

Köthe, G., Die Randverteilungen analytischer Funktionen 13

Haacke, W., Über die Stabilität eines Systems von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, die von Parametern abhängen. II. 34

Lenz, H., Über Orthogonaltrajektorien 46

Scheibe, E., Über einen verallgemeinerten affinen Zusammenhang. 65

Reichel, G., Zur Transformationstheorie der Matrizen über dem Ring der ganzen p-adischen Zahlen 75

Dürbaum, H., Über die Ganzheitsbereiche bewerteter Körper. 86

Fischer, W., Über die Zetafunktion des reell-quadratischen Zahlkörpers 94

Stoll, W., Mehrfache Integrale auf komplexen Mannigfaltigkeiten 116

KREISEL, G.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 1—12 (1952)

Some concepts concerning formal systems of number theory.

By

GEORG KREISEL

Introduction.

1. In the present paper we consider relations between the concepts of (finitist) interpretation [*1*], [*2*], external consistency [*3*], and ω-consistency [*4*]. The principal new result is that, under suitable conditions, the first two are equivalent, the last one stronger (more restrictive).

The first part of the paper develops the finitist no-counter-example-interpretation of number theory practically from scratch, proving the relevant results in a rather sharper form and more simply than was done in [*1*]. The sharpened form is used in the equivalence proof mentioned above.

2. The concepts considered were introduced in order to state conditions under which a formal system may "properly" be called a system of number theory. More precisely, they were introduced in the course of attempts to formulate precisely (and interestingly!) a number of vague questions which it is natural to ask about classical number theory ("meaning", "truth" and "proof" of propositions in arithmetic, etc).

A formal system which satisfies any one of these conditions has several properties which are useful in applications of number theory. This fact makes the conditions considered, interesting characterizations of "number theory". — We do not attempt to give "an analysis of the ideas which ... are implied in the common employment of the term" [*5*]. For, first, it is doubtful whether a natural meaning can be given to this phrase; but more important still, much better concepts are often invented for the very purposes which a particular concept in common use has served: thus concentration on a concept merely because it happens to be in common use, seems rather pedantic.

However, all three concepts have considerable similarity to the vague notion of "number theory". This gives them the additional advantage of having familiar features so that one can argue fairly freely with them.

3. Below, part I sets out the definitions to be used in the text, part II develops finitist interpretations, part III establishes the equivalence between external consistency and the no-counter example-interpretation, part IV shows that an ω-consistent system is externally consistent, and gives an example of a system which is externally consistent (w.r.t. quasi-recursive functions), but not ω-consistent. Also a question of MOSTOWSKI's [*6*] concerning ω-consistency is answered.

I. Definitions.

4. All the formal systems considered below include the formulae of primitive recursive arithmetic, and numerical formulae can be decided in them. The formulae of the systems used are recursively enumerable.

5. Let $\mathfrak{F}$ and F be two such systems, let $\mathfrak{A}$ denote a formula of $\mathfrak{F}$, A one of F.

An *interpretation* of $\mathfrak{F}$ by F is a quasi recursive function $g(n, a)$ such that $g(n, a)$ is the number of a formula A_n when a is the number of the formula $\mathfrak{A}$, suitable numberings of $\mathfrak{F}$ and F being assumed. The following further conditions are imposed:

(a) in a *disjunctive* interpretation,

(i) if $\mathfrak{A}$ is proved in $\mathfrak{F}$, some A_n can be proved in F,

(ii) if $\mathfrak{A}$ is disproved in $\mathfrak{F}$, each A_n can be disproved in F;

(In systems containing the rules of the predicate calculus, $\mathfrak{A}$ is said to be disproved when $\neg\mathfrak{A}$ is proved, all variables in $\mathfrak{A}$ being bound; in free variable systems, when a substitution for the variables in $\mathfrak{A}$ has been found which reduces $\mathfrak{A}$ to a false formula.)

(b) in a *conjunctive* interpretation the conditions a(i), a(ii) hold when the words "each" and "some" are interchanged;

(c) in a *complete disjunctive* interpretation, $\mathfrak{A}$ can be proved in $\mathfrak{F}$ if and only if some A_n can be proved in F;

(d) in *a complete conjunctive* interpretation, (c) holds when the word "some" is replaced by "each".

6. A system $\mathfrak{F}$ is *externally consistent* with respect to the class $\mathfrak{M}$ of functions $f_1(a_1)$, $f_n(a_1, \ldots, a_n)$, if $\mathfrak{F}$ remains consistent when the formula

$$(6.1) \qquad (x_1)(E\,y_1)\ldots(x_n)(E\,y_n)\,A(x_1, \ldots, x_n\, y_1, \ldots, y_n)$$

is added as an axiom, provided

$$\text{(i)} \qquad A(a_1, \ldots, a_n\, b_1, \ldots, b_n)$$

is primitive recursive,

$$(6.2) \qquad \text{(ii)} \qquad A[a_1, \ldots, a_n\, f_1(a_1)\ldots f_n(a_1, \ldots, a_n)]$$

is verifiable, the functions f are constants belonging to $\mathfrak{M}$.

More directly: if $(E\,x_1)(y_1)\ldots(E\,x_n)(y_n)\,A(x_1, \ldots, x_n\, y_1, \ldots, y_n)$, hence

$$(E\,x_1)\ldots E\,x_n)\,A[x_1, \ldots, x_n\, f_1(x_1)\ldots f_n(x_1, \ldots, x_n)]$$

has been proved in $\mathfrak{F}$, for functions f of $\mathfrak{M}$ there are *numerals* $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_n$ such that

$$A[\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_n\, f_1(\mathfrak{n}_1)\ldots f_n(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_n)]$$

is true.

7. $\mathfrak{F}$ is *ω-consistent* in the *strong sense* if there is a numeral $\mathfrak{n}$ (0, 1, 2, ...) such that $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ can be proved in $\mathfrak{F}$ when $(E\,y)\,\mathfrak{A}(y)$ has been proved in $\mathfrak{F}$.

$\mathfrak{F}$ is *ω-consistent* in the *weak sense* if given a proof of $(E\,y)\,\mathfrak{A}(y)$ in $\mathfrak{F}$, and a function $p(n)$, one can find a number $\mathfrak{n}$ such that $p(\mathfrak{n})$ is not the number of a proof in $\mathfrak{F}$ of the formula $\neg\,\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$.

II. Finitist Interpretations.

8. By a finitist interpretation of $\mathfrak{F}$ by F we mean one where all the formulae A_n are free variable formulae, and where there are effective methods of finding the verifiable $A_{\mathfrak{n}}$ (and the substitutions for the variables in A_m which make A_m false) when a proof (disproof) of $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{F}$ is at hand.

The systems considered below are:

$\mathfrak{F}_0$, the predicate calculus of first order to which verifiable free variable formulae of number theory have been added as axioms,

F_0, the elementary calculus with free variables to which the same axioms have been added,

$\mathfrak{F}_1$, the system Z_μ of [3], to which any verifiable free variable formula is added as axiom,

F_1, the system of ordinal recursive formulae ([1], para. 35) of finite order, and A is proved in F_1 if it is verifiable.

9. A *functional* of the *predicate calculus* containing the variable a, and the function symbol f is any free variable term of the predicate calculus which contains these symbols. (The definition for several variables is obvious.)

A functional of number theory Z_μ (with induction) containing the variable a, and the function symbol f is a term

$$\mu_y\,A\,[a\,f(y_1)\,y_1\,y_2]\,, \qquad y_1 = \eta_1^2(y)\,, \qquad y_2 = \eta_2^2(y)\,,$$

provided

$$(x_1)\,(E\,y_1)\,(x_2)\,(E\,y_2)\,A\,(x_1\,x_2\,y_1\,y_2)$$

has been proved in Z_μ. ($<\eta_1^2(y)\,\eta_2^2(y)>$ being the y^{th} pair in the ordering of pairs given in [3], II, 235.) $A\,(a\,b\,c\,d)$ is assumed to be primitive recursive. (The definition for function symbols $f_1(a_1), \ldots, f_n(a_1, \ldots, a_n)$ is:

$$\mu_y\,A\,[f_1(y_1) \ldots f_n(y_1, \ldots, y_n)\,y_1, \ldots, y_n]\,, \qquad y_i = \eta_i^{(n)}(y)$$

provided

$$(E\,y_1)\,(x_1) \ldots (E\,y_n)\,(x_n)\,A\,(x_1, \ldots, x_n\,y_1, \ldots y_n)$$

has been proved in Z_μ.)

Functionals of a number theory $\mathfrak{F}$ (containing Z_μ) are defined analogously.

10. The proofs below are carried out for formulae $\mathfrak{A}$ of the form

$$(x)\,(E\,y)\,(z)\,A\,(x, y, z)\,.$$

The (rather complicated) general definitions are given in [1]; the necessary modifications of the proofs for the special case considered are plain.

11. Theorem I. *Suppose* $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n$ *are functionals of the predicate calculus containing* a *and* g *such that*

$$A[a, \mathfrak{y}_1, g(\mathfrak{y}_1)] \vee \ldots \vee A[a, \mathfrak{y}_n, g(\mathfrak{y}_n)] \tag{11.1}$$

is verifiable (for each a*, and for functions* g *which differ from zero for a finite number of arguments only).*

If $\mathfrak{x}_i, \mathfrak{z}_i$, $1 \leq i \leq p$ *are functionals of the predicate calculus containing the function symbol* f*, then we can find free variable terms* $\underset{\sim}{f}^j$, $1 \leq j \leq q$ *such that the disjunction of the formulae*

$$A[\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_1^j, \underset{\sim}{f}^j(\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_1^j), \underset{\sim}{\mathfrak{z}}_1^j] \,\&\, \ldots \,\&\, A[\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_p^j, \underset{\sim}{f}^j(\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_p^j), \underset{\sim}{\mathfrak{z}}_p^j] \tag{11.2}$$

for $1 \leq j \leq q$ *is true.*

(j is a name of the function symbol, not an exponent.)

Write $\mathfrak{A}$ for $(x)\,(E\,y)\,(z)\,A\,(x, y, z)$, $\mathfrak{t}(a)$ for $\varepsilon_y(z)\,A\,(a, y, z)$, $\mathfrak{e}$ for $\varepsilon_x(y)\,(E\,z) \rightarrow A\,(x, y, z)$, and $\mathfrak{e}_1(b)$ for $\varepsilon_z \rightarrow A\,(\mathfrak{e}, b, z)$. Further let $\bar{\mathfrak{x}}$ and $\bar{\mathfrak{z}}$ denote the terms obtained by substituting $\mathfrak{t}$ for f in $\mathfrak{x}$ and $\mathfrak{z}$, and let $\bar{\mathfrak{y}}$ denote the term obtained by substituting $\mathfrak{e}_1$ for g in $\mathfrak{y}$.

$$A[\mathfrak{e}, \bar{\mathfrak{y}}_r, \mathfrak{e}_1(\bar{\mathfrak{y}}_r)] \rightarrow \mathfrak{A} \tag{11.3}$$

and

$$\mathfrak{A} \rightarrow A[\bar{\mathfrak{x}}_i, \mathfrak{t}(\bar{\mathfrak{x}}_i), \bar{\mathfrak{z}}_i] \tag{11.4}$$

can be proved in $\mathfrak{F}_0$ for $1 \leq r \leq n$, $1 \leq i \leq p$, and hence also

$$\begin{cases} \{A[\bar{\mathfrak{x}}_1, \mathfrak{t}(\bar{\mathfrak{x}}_1), \bar{\mathfrak{z}}_1] \,\&\, \ldots \,\&\, A[\bar{\mathfrak{x}}_p, \mathfrak{t}(\bar{\mathfrak{x}}_p), \bar{\mathfrak{z}}_p]\} \vee \\ \rightarrow \{A[\mathfrak{e}, \bar{\mathfrak{y}}_1, \mathfrak{e}_1(\bar{\mathfrak{y}}_1)] \vee \ldots \vee A[\mathfrak{e}, \bar{\mathfrak{y}}_n, \mathfrak{e}_1(\bar{\mathfrak{y}}_n)]\}. \end{cases} \tag{11.5}$$

The only ε-matrices (= Grundtypen) occurring in (11.5) are $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1(a)$, $\mathfrak{t}(a)$. When HILBERT's first ε-theorem is applied to the proof of (11.5), one gets free variable terms $\underset{\sim}{f}^j(a)$, $\underset{\sim}{g}^j(b)$, e^j, $1 \leq j \leq q$, such that the disjunction of the formulae got by substituting in (11.5) $\underset{\sim}{f}^j$ for $\mathfrak{t}$, $\underset{\sim}{g}^j$ for $\mathfrak{e}_1$, and e^j for $\mathfrak{e}$, is verifiable. But for each j the formula

$$A[e^j, \underset{\sim}{\mathfrak{y}}_1^j, \underset{\sim}{g}^j(\underset{\sim}{\mathfrak{y}}_1^j)] \vee \ldots \vee A[e^j, \underset{\sim}{\mathfrak{y}}_n^j, \underset{\sim}{g}^j(\underset{\sim}{\mathfrak{y}}_n^j)]$$

is verifiable, so the disjunction of formulae

$$A[\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_1^j, \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_1^j), \underset{\sim}{\mathfrak{z}}_1^j] \,\&\, \ldots \,\&\, A[\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_p^j, \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_p^j), \underset{\sim}{\mathfrak{z}}_p^j]$$

must be true.

This proves the theorem.

12. It follows that we get a disjunctive interpretation of $\mathfrak{F}_0$ by F_0 if we associate with

$$(E\,x)\,(y)\,(E\,z) \rightarrow A\,(x, y, z) \tag{12.1}$$

the sequence of disjunctions

$$(12.2) \qquad \neg A[\mathfrak{x}_1, f(\mathfrak{x}_1), \mathfrak{z}_1] \vee \ldots \vee \neg A[\mathfrak{x}_p, f(\mathfrak{x}_p), \mathfrak{z}_p]$$

for all possible sets of functionals $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ containing f.

(Since Theorem I was proved for a special type of formula, we again define the interpretation for the special class of formulae (12.1). The general case is given in [1].)

Condition a(i) is checked by HERBRAND's theorem, see, e.g., [3], II.

To check condition a(ii) observe that if (12.1) is disproved in $\mathfrak{F}_0$, i.e. $(x)(E\,y)(z)\,A(x, y, z)$ is proved, by Theorem I there is a substitution of free variable terms for f which makes (12.2) false.

13. The interpretation is actually complete, since if (12.1) is provable in $\mathfrak{F}_0$, some disjunction of the form (12.2) is not only verifiable, but also provable in F_0, and, conversely, by (11.3) if (12.2) is provable in F_0 we get a proof of (12.1) in $\mathfrak{F}_0$.

Note that under our conditions a *complete interpretation is an interpretation*. For, if $\mathfrak{A}$ is proved (and $\mathfrak{F}$ is consistent), $\neg\mathfrak{A}$ cannot be proved (in any consistent extension of $\mathfrak{F}$), and hence no A_n can be proved in F. But the sequences A_n constitute an interpretation of $\mathfrak{A}$ whatever verifiable axioms may be added to $\mathfrak{F}$, provided no new symbols are added to $\mathfrak{F}$. Now by adding all verifiable formulae of $\mathfrak{F}$ to F we get, in our case, a system in which every formula of F can either be proved or disproved. Thus if no A_n can be proved in these extensions of F, each A_n must have a counter example.

14. We may observe that condition (δ) of para. 20 in [1] is easily checked. Recall that (δ) requires that some B_m should be verifiable if $\mathfrak{B}$ has been proved from $\mathfrak{A}$ (in $\mathfrak{F}$), and A_n is verifiable. Now, since by (11.3) $\mathfrak{A}$ can be proved from A_n, $\mathfrak{B}$ can also be proved from A_n, i.e. from a verifiable free variable formula of $\mathfrak{F}$. HILBERT's first ε-theorem can then be applied to provide a verifiable B_m.

15. We now turn to the analogous interpretation of Z_μ. We recall from [1] that the functionals considered are ordinal recursive of finite order.—The new point to be considered (over and above Theorem I) is the representation of functionals.

Theorem II. *Suppose* $\mathfrak{y}$ *is a functional of* Z_μ *containing the variable* a, *and the function symbol* g, *such that*

$$A[a, \mathfrak{y}, g(\mathfrak{y})]$$

is verifiable.

If $\mathfrak{x}$ *and* $\mathfrak{z}$ *are also functionals of* Z_μ *containing the function symbol* f, *then we can find a function* $\underset{\sim}{f}$, *zero except for a finite number of arguments, such that*

$$A[\underset{\sim}{\mathfrak{x}}, f(\underset{\sim}{\mathfrak{x}}), \underset{\sim}{\mathfrak{z}}]$$

is true.

Let $\mathfrak{y}$ be the term $\mu_y B[a, g(y_1), y_1, y_2]$, $\mathfrak{x}$ be $\mu_y B_1[f(y_1), y_1, y_2]$, $\mathfrak{z}$ be $\mu_y B_2[f(y_1), y_1, y_2]$. Let $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1(b)$, $\mathfrak{t}(a)$ and bars have the same meaning as in Theorem I.

(i) Observe first that for any terms $\mathfrak{u}(a)$, $\mathfrak{v}$ of Z_μ, there is a term $\mathfrak{p}^*$ of Z_μ such that

(15.1) $$(x)\,[x \leqq \mathfrak{v} \to \mathfrak{u}(x) = \nu(\mathfrak{p}^*, x)]$$

can be proved in Z_μ. Here $\nu(m, k)$ denotes the primitive recursive function whose value is 0, if $m = 0$, and is equal to the exponent of the highest power of the k^{th} prime which divides m (see [3], II, 211). — $\nu(m, k)$ is an enumeration of functions of k which are zero except for a finite number of arguments.

For $\mathfrak{p}^*$ we may take

$$\mu_y(x)\,[x \leqq \mathfrak{v} \to \mathfrak{u}(x) = \nu(y, x)].$$

One proves (15.1) by induction. Let $\mathfrak{C}(n)$ denote

$$(E\,y)(x)\,[x \leqq n \to \mathfrak{u}(x) = \nu(y, x)].$$

$\mathfrak{C}(0)$ can be proved since we need merely take $\mathfrak{p}^* = 2^{\mathfrak{u}(0)}$.

Next we prove $\mathfrak{C}(n) \to \mathfrak{C}(n+1)$ (in Z_μ).

(15.2) $$(x)\,[x \leqq n \to \mathfrak{u}(x) = \nu(a, x)] \to (x)\,\{x \leqq n+1 \to \mathfrak{u}(x) = \nu[a_1\, \mathfrak{p}_{n+1}^{\mathfrak{u}(n+1)}, x]\},$$

where a_1 is got from a by suppressing powers of the m^{th} prime ($\mathfrak{p}_m$) for $m > n$. (Proof clear.)

Now, from (15.2), eliminating $a_1\, \mathfrak{p}_{n+1}^{\mathfrak{u}(n+1)}$ by an existential quantifier we get

$$(x)\,[x \leqq n \to \mathfrak{u}(x) = \nu(a, x)] \to (E\,y)\,(x)\,[x \leqq n+1 \to \mathfrak{u}(x) = \nu(y, x)];$$

on binding the variable a, $\mathfrak{C}(n) \to \mathfrak{C}(n+1)$ is proved.

(This argument can be extended to terms with several variables. It replaces the absurdly complicated work of para. 33 in [1].)

(ii) For any term $\mathfrak{u}(a)$ of Z_μ we can write down a term $\mathfrak{p}^*$ such that if $\mathfrak{y}^*$ denotes $\mu_y B[a, \mathfrak{u}(y_1), y_1, y_2]$, and $\lambda(a, r, s)$ denotes the *primitive recursive function* which is represented by

$$\mu_y\{B[a, \nu(r, y_1), y_1, y_2] \,\&\, y \leqq s\},$$

and $\mathfrak{p}^*$ denotes the term of (i) such that

$$(x)\,[x \leqq \mathfrak{y}^* \to \nu(\mathfrak{p}^*, x) = \mathfrak{u}(x)] \text{ is provable in } Z_\mu: -$$

then also

$$B[a, \mathfrak{u}(\mathfrak{y}_1^*), \mathfrak{y}_1^*, \mathfrak{y}_2^*],\ \mathfrak{y}^* = \lambda(a, \mathfrak{p}^*, \mathfrak{y}^*),\ \mathfrak{u}(\mathfrak{y}_1^*) = \nu(\mathfrak{p}^*, \mathfrak{y}_1^*)$$

can be proved in Z_μ. The first follows from the hypothesis that

$$(x_1)\,(E\,y_1)\,(x_2)\,(E\,y_2)\,B(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

can be proved in Z_μ, the second and third from the definition of $\mathfrak{p}^*$.

In particular, we have:

(15.3) $$B[\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1(\overline{\mathfrak{y}}_1), \overline{\mathfrak{y}}_1, \overline{\mathfrak{y}}_2],\quad \overline{\mathfrak{y}} = \lambda(\mathfrak{e}, \mathfrak{p}, \overline{\mathfrak{y}}),\quad \mathfrak{e}_1(\overline{\mathfrak{y}}_1) = \nu(\mathfrak{p}, \overline{\mathfrak{y}}_1),$$

where

$$(x)\,[x \leq \overline{\mathfrak{y}} \to \mathfrak{e}_1(x) = v(\mathfrak{p}, x)];$$

and if $\lambda_i(r, s)$ denotes

$$\mu_y\{B_i[v(r, y_1), y_1, y_2] \,\&\, y \leq s\},$$

$$i = 1, 2,\ (x)\,[x \leq \max(\overline{\mathfrak{x}}, \overline{\mathfrak{z}}) \to \mathfrak{t}(x) = v(\mathfrak{p}_1, x)],$$

then

$$B_1[\mathfrak{t}(\overline{\mathfrak{x}}_1), \overline{\mathfrak{x}}_1, \overline{\mathfrak{x}}_2],\quad B_2[\mathfrak{t}(\overline{\mathfrak{z}}_1), \overline{\mathfrak{z}}_1, \overline{\mathfrak{z}}_2],$$

and

$$\overline{\mathfrak{x}} = \lambda_1(\mathfrak{p}_1, \overline{\mathfrak{x}}),\quad \overline{\mathfrak{z}} = \lambda_2(\mathfrak{p}_1, \overline{\mathfrak{z}}),\quad \mathfrak{t}(\overline{\mathfrak{x}}_1) = v(\mathfrak{p}_1, \overline{\mathfrak{x}}_1) \tag{15.4}$$

can also be proved in Z_μ.

Note that *if* $B\{a, v\{r, \eta_1^2[\lambda(a, r, s)]\}, \eta_1^2[\lambda(a, r, s)], \eta_2^2[\lambda(a, r, s)]\}$ holds, then $\lambda(a, r, s)$ is the *value* of the functional $\mathfrak{y}$ for the arguments a and $v(r, b)$ (with the free variable b).

(iii) Recall from Theorem I that the formulae

$$A[\mathfrak{e}, \overline{\mathfrak{y}}, \mathfrak{e}_1(\overline{\mathfrak{y}})] \to \mathfrak{A}, \tag{15.5}$$

and

$$\mathfrak{A} \to A[\overline{\mathfrak{x}}, \mathfrak{t}(\overline{\mathfrak{x}}), \overline{\mathfrak{z}}] \tag{15.6}$$

can be proved in Z_μ.

Now, apply ACKERMANN's substitution method to the proofs of (15.3), (15.4), (15.5) and (15.6). It yields numbers e, p, p_1 (for $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{p}$, and $\mathfrak{p}_1$), and also numerical substitutions for the terms $\overline{\mathfrak{x}}$, $\overline{\mathfrak{y}}$, and $\overline{\mathfrak{z}}$, which reduce all formulae of the proofs considered to correct numerical formulae. In particular, from (15.3), the number substituted for $\lambda(\mathfrak{e}, \mathfrak{p}, \overline{\mathfrak{y}}_1)$ is the value of the functional $\mathfrak{y}$ when a is replaced by e, and the function $g(b)$ by $v(p, b)$. Since $A[a, \mathfrak{y}, g(\mathfrak{y})]$ is assumed to be verifiable, $A[e, \mathfrak{y}, v(p, \mathfrak{y})]$ is true where $\mathfrak{y}$ denotes the number substituted for λ. By (15.5), $\mathfrak{A}$ is replaced by a correct numerical formula, and hence, by (15.6), also $A[\overline{\mathfrak{x}}, \mathfrak{t}(\overline{\mathfrak{x}}), \overline{\mathfrak{z}}]$. But, as above, the numbers substituted for $\overline{\mathfrak{x}}$ and $\overline{\mathfrak{z}}$ are the values of the functionals $\mathfrak{x}$ and $\mathfrak{z}$ with the argument $v(p_1, b)$. Thus $v(p_1, b)$ is the function $f(b)$ required.

This proves the theorem, and the construction of a complete disjunctive interpretation follows the pattern of para. 12.

16. Note that the proof does not need the ε-symbol. We could replace (15.3)—(15.6) by the formula

$$\begin{aligned}
&(E\,e)\,(E\,p)\,(E\,p_1)\,(E\,x)\,(E\,y)\,(E\,z)\\
&\{A\,\{\lambda_1(p_1, x),\ v[p_1, \lambda_1(p_1, x)],\ \lambda_2(p_1, z)\} \vee\\
&\neg A\,\{e,\ \lambda(e, p, y),\ v[p, \lambda(e, p, y)]\} \cdot \&\\
&B\,\{e,\ v[p, \eta_1^2(\lambda)],\ \eta_2^2(\lambda),\ \eta_2^2(\lambda)\} \,\&\, B_1[v(p_1, \lambda_{11}),\ \lambda_{11},\ \lambda_{12}] \,\&\\
&B_2[v(p_1, \lambda_{21}),\ \lambda_{21},\ \lambda_{22}]\},
\end{aligned} \tag{15.7}$$

λ_{ij} denoting $\eta_j^2(\lambda_i)$,

where the expression following the quantifiers is primitive recursive. Now Theorem II will follow if we can find numerals e, p, p_1, x, y, z which satisfy (15.7). Hence Theorem II will be true of any formal system $\mathfrak{F}$ in which the formula (15.1) can be proved, and if a formula $(E\,x)\,A(x)$ with primitive recursive A has been proved there is a numeral n such that $A(n)$ is true.

17. Note further that the proof of Theorem II also applies if by a *verifiable* formula $A[a, \mathfrak{y}, g(\mathfrak{y})]$ we understand one which is verifiable for functions which are zero except for a finite number of arguments. If $\mathfrak{y}(a, p)$ denotes the term $\mu_y B[a, v(p, y_1), y_1, y_2]$ we get a *disjunctive interpretation* of Z_μ by *formulae without function symbols* if we associate with $(x)\,(E\,y)\,(z)\,A(x, y, z)$ the sequence $A\{a, \mathfrak{v}_n(a, p), v[p, \mathfrak{v}_n(a, p)]\}$ where $\mathfrak{v}_n$ is an enumeration of functionals of Z_μ with one individual variable, and one function variable.

18. The result of para. 17 may, roughly, be expressed by saying: if a formula contains none but our functionals, i.e. those of the predicate calculus, and those of Z_μ, and is verifiable for the functions $v(p, b)$, $p = 0, 1, \ldots$, it will be verifiable for "all" functions. For this it is necessary to impose some restriction on functionals; consider, e.g., as in footnote 9 of [1], the functional $\mathfrak{z}_c[f(c)]$

$$\mu_z\{\neg\,\mathrm{Prov}\,[f(z_1), s(z_1, z_1)]\,\&\,\mathrm{Prov}\,[z_2, s(z_1, z_1)]\} \tag{18.1}$$

where Prov (a, b) holds if and only if a is the number of a proof in Z_μ of the formula with number b, and $s(a, b)$ is GÖDEL's substitution function. If $f(b)$ is quasi recursive we can always find numbers $\mathfrak{x}$ and $\mathfrak{y}$ such that

$$\neg\,\mathrm{Prov}\,[f(\mathfrak{y}), s(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})] \quad \text{and} \quad \mathrm{Prov}\,(\mathfrak{x}, s(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})] \tag{18.2}$$

(by a diagonal argument, see appendix I of [1]). Going through the pairs of numbers preceding $\langle \mathfrak{y}, x\rangle$ in the ordering $\langle \eta_1^2(z), \eta_2^2(z)\rangle$ we find the value of (18.1).—The formula

$$\neg\,\mathrm{Prov}\,[f(\mathfrak{z}_1),\ s(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1)]\,\&\,\mathrm{Prov}\,[\mathfrak{z}_2, s(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1)]$$

is verifiable for quasi recursive functions $f(b)$, but not for functions computable in informal systems (cf. [6]).

Another point which is illustrated by the term (18.1) is that an ε-substitution method cannot generally be modified so as to replace a term $\mathfrak{z}_c[\mathfrak{e}(c)]$ with an ε-matrix $\mathfrak{e}(c)$ by the value of $\mathfrak{z}_c[e(c)]$ when $\mathfrak{e}(c)$ is replaced by the function $e(c)$. This was the crucial point (ii) in the proof of Theorem II.

19. It would be very interesting to have a definition of "computable functional" without reference to a particular formal system. Para. 18 shows that the most natural modification of the usual idea of "computable functions" is inappropriate.

III. External Consistency.

20. We take $\mathfrak{M}$ to be the class of quasi recursive functions. We use the representation of [3], II, 410, in the form $v_0\{\mu_x[\mathfrak{h}(l, n, x) = 0]\}$; sometimes we use instead of $\mathfrak{h}(l, n, x)$ the function $\mathfrak{h}_1(l, n, x)$ which is defined by the

conditions: $\mathfrak{h}_1(l, n, x) = \mathfrak{h}(l, n, x)$ if $\mathfrak{h}(l, n, y) \neq 0$ for all $y < x$, and $\mathfrak{h}_1(l, n, x) = 1$ otherwise. $\mathfrak{h}_1(l, n, x)$ is also primitive recursive.

If a_i denotes $\eta_i^{(n)}(a)$, α_i denotes $\eta^{(i)}(a_1, \ldots, a_i)$, $f_i(a_1, \ldots, a_i)$ may be represented by $\nu_0\{\mu_x[\mathfrak{h}_1(l_i, \alpha_i, x) = 0]\}$, and the $2n$-tuple

$$\langle \cdots a_i \ldots, \ldots \nu_0\{\mu_x[\mathfrak{h}_1(l_i, \alpha_i, x) = 0]\} \cdots \rangle$$

$1 \leq i \leq n$, has the number $\nu_0\{\mu_x[\mathfrak{h}_1(l, a, x) = 0]\}$ (for suitable l).

Then $(E\,x_1) \ldots (E\,x_n)\, A[x_1, \ldots, x_n\, f_1(x_1) \ldots f_n(x_1, \ldots, x_n)]$ is equivalent in Z_μ to

$$(E\,x)\,(E\,y)\{\mathfrak{h}_1(l, x, y) = 0\,\&\,A\{\eta_1^{2n}[\nu_0(y)] \ldots, \ldots \eta_{2n}^{2n}[\nu_0(y)]\}\}.$$

Note that the expression following the quantifiers is primitive recursive. (This is the standard reduction of variables which applies to Z_μ.)

21. From the second definition of external consistency (with respect to quasi recursive functions) and the preceding paragraph it follows that $\mathfrak{F}$ is externally consistent if there is a numeral $\mathfrak{n}$ such that $A(\mathfrak{n})$ holds whenever $(E\,x)\,A(x)$ has been proved in $\mathfrak{F}$ for *primitive recursive* A.

(In the next section it will be seen that this result does not hold if $\mathfrak{M}$ includes certain functions which are computable in informal systems.)

22. If $\mathfrak{F}$ has the no-counter example-interpretation the condition of para. 21 is satisfied. Hence if there is such an interpretation, $\mathfrak{F}$ is externally consistent with respect to $\mathfrak{M}$.

23. Conversely, by para. 16, if $\mathfrak{F}$ is externally consistent [and if the proofs of (i) and (ii) of Theorem II are valid in $\mathfrak{F}$, e.g. if $\mathfrak{F}$ contains Z_μ], $\mathfrak{F}$ has the no-counter example-interpretation.

24. General Remark. The no-counter-example-interpretation, and the condition of external consistency of $\mathfrak{F}$ both ensure that proved formulae (6.1) of $\mathfrak{F}$ do not conflict too sharply with the *naive reading* of (6.1) as:

For any (recursive integer) x, there is a y_1 such that ...

$$A(x_1, \ldots, x_n\, y_1, \ldots, y_n)$$

holds. (A "recursive integer" is a term which can be proved equal to a numeral, in the system considered.)

[This naive reading almost falls under the concept of disjunctive interpretation if with (6.1) of $\mathfrak{F}$ is associated the class of formulae (6.2): such an association is in any case no interpretation in the sense of para. 5 because the class of formulae (6.2) is not recursively enumerable.]

The naive reading is false if $\mathfrak{F}$ includes the predicate calculus and primitive recursive formulae, since

$$(x)\,(E\,y)\,(z)\{\mathrm{Prov}[y, s(x, x)] \vee \neg\, \mathrm{Prov}[z, s(x, x)]\}$$

can be proved in $\mathfrak{F}$, but is not satisfied by any quasi recursive $\gamma(x)$ (see para. 18, and appendix I of [*1*]).

Now, external consistency requires that if a formula (6.2) is verifiable, (6.1) cannot be disproved in $\mathfrak{F}$.

The no-counter example-interpretation ensures that if (6.1) has been disproved, no formula (6.2) can be verifiable, i.e. given any set of functions $f_1(a_1), \ldots, f_n(a_1, \ldots, a_n)$ we can find counter examples to (6.2); these depend in a simple manner on the functions f.—This is condition a(i) of para. 5.

Further, if (6.1) has been proved, and counter examples to (6.2) in the form of functionals $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ of $\mathfrak{F}$ with the arguments $f_1, \ldots, f_n$ are proposed (such that $A[\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n f_1(\mathfrak{x}_1) \ldots f_n(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)]$ is to be false), we can counter with functions $\underset{\sim}{f}$ which make $A[\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_1, \ldots, \underset{\sim}{\mathfrak{x}}_n \underset{\sim}{f}_1(\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_1) \ldots \underset{\sim}{f}_n(\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_1, \ldots, \underset{\sim}{\mathfrak{x}}_n)$ true.—This is condition a(ii) of para. 5.

IV. Ω-Consistency.

25. Z_μ is not ω-consistent in the strong sense, see, e.g., para. 13 of [8]. Below we consider only ω-consistency in the weak sense.

26. As usual we call a function $f(n)$ representable in $\mathfrak{F}$ if there is a term $t(a)$ of $\mathfrak{F}$ with the free variable a such that $t(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$ with recursive integers $\mathfrak{n}$ and $\mathfrak{m}$ can be proved in $\mathfrak{F}$ if and only if the value of $f(\mathfrak{n})$ is $\mathfrak{m}$.

Theorem III. *If the functions f of $\mathfrak{M}$ are representable in $\mathfrak{F}$, and if $\mathfrak{F}$ is ω-consistent, $\mathfrak{F}$ is also externally consistent with respect to $\mathfrak{M}$.*

Lemma. *If $\mathfrak{A}(n)$ is decidable in $\mathfrak{F}$ for each recursive integer n, $(E\,y)\,\mathfrak{A}(y)$ has been proved in $\mathfrak{F}$, and $\mathfrak{F}$ is ω-consistent, there must be a recursive integer $\mathfrak{n}$ such that $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ can be proved in $\mathfrak{F}$.*

$\mathfrak{A}(n)$ can either be proved or disproved in $\mathfrak{F}$. If the lemma were false, $\neg\mathfrak{A}(n)$ could be proved for each recursive n, contrary to the assumption of ω-consistency.

[Keeping more closely to the definition of para. 7, we define $p(n)$ to be the number of the shortest proof of either $\mathfrak{A}(n)$ or of $\neg\mathfrak{A}(n)$: by the condition of decidability, $p(n)$ is computable, and quasi recursive if, e.g., proofs of $\mathfrak{F}$ are recursively enumerable. Then we find an $\mathfrak{n}$ such that $p(\mathfrak{n})$ is not number of a proof of $\neg\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ i.e. $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ can be proved in $\mathfrak{F}$.]

Now, take for $\mathfrak{A}(m)$ the formula $A[m_1, \ldots, m_n\, t_1(m_1) \ldots t_n(m_1, \ldots, m_n)]$ where m_i denotes $\eta_i^{(n)}(m)$.

27. The converse is not true.

Theorem IV. *There is a formula $\mathfrak{Q}$ of Z_μ of the form $(E\,x)\,(y)\,(E\,z)\,Q(x, y, z)$, Q primitive recursive such that the system $\mathfrak{F}$ consisting of Z_μ to which $\mathfrak{Q}$ has been added as an axiom, is externally consistent with respect to quasi recursive functions but not ω-consistent.*

Actually, for each recursive $\mathfrak{n}$, $(E\,y)\,(z)\neg Q(\mathfrak{n}, y, z)$ can be proved in Z_μ. Consider the formula

$$(27.1)\quad (E\,p)\,(E\,l)\,(n)\,(E\,m)\,\{\mathfrak{h}_1(l, n, m) = 0\ \&\ \nu_0(m) \neq 0\ \&\ \mathrm{Prov}[s(b, b), p, N(l)]\}\,,$$

where b is a free variable, Prov (a, b, c) holds if and only if b is the number of a proof in Z_μ of the formula with number c from the formula with number a, $N(l)$ is the number of the formula

$$(E\,y)\,(E\,z)\,[\mathfrak{h}_1(0^l, y, z) = 0\ \&\ \nu_0(z) = 0]$$

with the standard integer $0', = l$, and $\mathfrak{h}_1$, v, s are primitive recursive functions already defined in the text.

If $\mathfrak{p}$ is the number of the formula (27.1), and $\mathfrak{q}$ denotes $s(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$, $\mathfrak{Q}$ is the formula

$$(E\,\mathfrak{p})\,(E\,l)\,(n)\,(E\,m)\,\{\mathfrak{h}_1(l, n, m) = 0\ \&\ v_0(m) \neq 0\ \&\ \mathrm{Prov}\,[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}, N(l)]\}.$$

Now, $\mathfrak{F}$ is externally consistent. If not, by para. 20 there would be a formula

$$(E\,m)\,(E\,x)\,[\mathfrak{h}_1(l_0, x, m) = 0\ \&\ v_0(m) = 0]$$

for a certain l_0, which can be proved in $\mathfrak{F}$ by a proof with number $\mathfrak{p}_0$, and

$$v_0\{\mu_x\,[\mathfrak{h}_1(l_0, n, x) = 0]\}$$

would be computable, i.e. for each recursive n there would be a recursive m such that $\mathfrak{h}_1(l_0, n, m) = 0$, yet for all n

$$v_0\{\mu_x\,[\mathfrak{h}_1(l_0, n, x) = 0]\} \neq 0.$$

In other words, $\mathfrak{Q}$ would be satisfied by the numbers $\mathfrak{p}_0, l_0$, and the function $\mu_x\,[\mathfrak{h}_1(l_0, n, x) = 0]$ for m. This is impossible, since by [7] and [1] Z_μ remains externally consistent if a formula with a quasi recursive *Erfüllung* is added to it as an axiom.

However, $\mathfrak{F}$ is not ω-consistent. Take any two numbers $\mathfrak{p}_0$ and l_0:

If $\mathrm{Prov}\,[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_0, N(l_0)]$ is false [it can be decided systematically, since $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}_0, N(l_0)$, are recursive integers], the formula

$$(n)\,(E\,m)\,\{\mathfrak{h}_1\,(l_0, n, m) = 0\,\&\,v_0(m) \neq 0\,\&\,\mathrm{Prov}\,[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_0, N(l_0)]\}$$

can be disproved (already by the propositional calculus).

If $\mathrm{Prov}\,[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_0, N(l_0)]$ is correct, one can prove

$$(27.2)\qquad (n)\,(E\,m)\,[\mathfrak{h}_1(l_0, n, m) = 0\,\&\,v_0(m) \neq 0] \to \mathfrak{Q}$$

in Z_μ. But since $\mathrm{Prov}\,[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_0, N(l_0)]$ holds, $\mathfrak{p}_0$ is the number of a proof in Z_μ of the formula

$$(27.3)\qquad \mathfrak{Q} \to (E\,y)\,(E\,z)\,[\mathfrak{h}_1(l_0, y, z) = 0\ \&\ v_0(z) = 0].$$

From (27.2) and (27.3)

$$(E\,y)\,(E\,z)\,[\mathfrak{h}_1(l_0, y, z) = 0\,\&\,v_0(z) = 0] \vee \neg\,(y)\,(E\,z)\,[\mathfrak{h}_1(l_0, y, z) = 0\,\&\,v_0(z) \neq 0].$$

But by the "uniqueness" condition on $\mathfrak{h}_1$

$$(E\,y)\,(E\,z)\,[\mathfrak{h}_1(l_0, y, z) = 0\ \&\ v_0(z) = 0] \to (E\,y)\,(z)\,[v_0(z) = 0 \vee \mathfrak{h}_1(l_0, y, z) \neq 0]$$

i.e. $$\neg\,(y)\,(E\,z)\,[\mathfrak{h}_1(l_0, y, z) = 0\ \&\ v_0(z) \neq 0].$$

Hence again we get a proof in Z_μ of

$$\neg\,(n)\,(E\,m)\,\{\mathfrak{h}_1(l_0, n, m) = 0\ \&\ v_0(m) \neq 0\ \&\ \mathrm{Prov}\,[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_0, N(l_0)]\}.$$

This proves the theorem.

28. It should be observed that if Z_μ is ω-consistent (in the weak sense), Theorem IV is best possible; that is, a system $\mathfrak{F}$ consisting of Z_μ with $\mathfrak{Q}_1$ as an axiom where $\mathfrak{Q}_1$ contains only *two* quantifiers, is ω-consistent if it is externally consistent with respect to quasi recursive functions. For the addition of a formula $(x)\,(E\,y)\,Q_1(x, y)$ to Z_μ leaves Z_μ externally consistent only if there is a quasi recursive $f(a)$ such that $Q[a, f(a)]$ is verifiable (trivial).

29. Remark. In [6], p. 100, 4.34, Mostowski raises the question whether there are systems where there is no case of an ω-inconsistency with decidable formulae $\mathfrak{A}(n)$, but there are such cases with general $\mathfrak{A}(n)$.

(i) If we consider strong ω-consistency, Z_μ is a case in point.

(ii) If we consider weak ω-consistency, and mean by "decidable" decidable in the system, there can be no such case: for an instance of ω-inconsistency would be a formula $\mathfrak{A}(n)$ such that in the system we can prove $(E\,y)\,\mathfrak{A}(y)$, and, for each recursive n, also $\neg\,\mathfrak{A}(n)$ i.e. $\mathfrak{A}(n)$ would be decidable (and false).

(iii) If by "decidable" we mean quasi recursive, and $\mathfrak{A}(n)$ is of the form $A[n, f(n)]$, the system $Z_\mu + \mathfrak{Q}$ of Theorem IV is an example.

30. Final Note. The question "whether there are true formulae of arithmetic which are unprovable" might be formulated by the use of the concepts of external consistency and ω-consistency as follows: by "formulae of arithmetic" we mean formulae of Z_μ, by "true" we mean, e.g., true in Tarski's sense [9], and by "provable" we mean provable in an externally consistent (or ω-consistent) extension of Z_μ. This however makes the question totally uninteresting: if $\mathfrak{A}$ is true, the system Z_μ with $\mathfrak{A}$ as an axiom is ω-consistent (according to [9]), and in this system $\mathfrak{A}$ is proved trivially, since it is an axiom.

References.

[1] Kreisel, G.: On the interpretation of non finitist proofs. J. Symb. Logic **16**, 4 (1951); **17**, 1 (1952). — [2] Kreisel, G.: On the concepts of completeness and interpretation of formal systems. Fundamenta mathematicae **39** (1952). — [3] Hilbert, D., and P. Bernays: Grundlagen der Mathematik. Vol. I, Berlin 1934; vol. II, Berlin 1939. [4] Gödel, K.: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. I. Mh. Math. Phys. **38**, 173—198 (1931). — [5] Russell, B.: The Principles of Mathematics, p. 3. London 1937. — [6] Mostowski, A.: On definable sets of positive integers. Fundamenta mathematicae **34**, 81—112 (1947). — [7] Ackermann, W.: Zur Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Math. Ann. **117**, 162—194 (1940). — [8] Kreisel, G.: Note on arithmetic models for consistent formulae of the predicate calculus. Fundamenta mathematicae **37**, 265—285 (1950). — [9] Tarski, A.: Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. Studia philosophica **1**, 261—405 (1936).

The University, Reading (England).

(Eingegangen am 17. Januar 1952.)

Köthe, G.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 13—33 (1952)

Die Randverteilungen analytischer Funktionen.

Von
Gottfried Köthe

Die vorliegende Arbeit setzt frühere Untersuchungen [5][1]) fort, die an Arbeiten von J. S. e Silva [7] und O. Toeplitz [9] anschließen. Die hier verwendeten Resultate aus [5] wurden auch unabhängig von C. Dias [2] und A. Grothendieck [3] erhalten.

Ist C eine analytische geschlossene Kurve auf der Riemannschen Zahlenkugel Ω, so bilden die auf C analytischen Funktionen einen lokalkonvexen linearen Raum $\mathfrak{A}(C)$. Der duale Raum $\mathfrak{A}'(C)$ wurde in [5] dargestellt als der Raum $P(\Omega - C)$ der in $\Omega - C$ lokalanalytischen Funktionen. Es werden hier in einem gewissen Gegensatz dazu die Elemente u von $\mathfrak{A}'(C)$ als auf C selbst erklärte mathematische Größen aufgefaßt, die wir als die Randverteilungen auf C bezeichnen. Dies entspricht ganz dem Vorgehen von L. Schwartz [6] im Fall der Distributionen. Es zeigt sich, daß die einer Randverteilung u entsprechende lokalanalytische Funktion $\tilde{u} \in P(\Omega - C)$ bei Annäherung an den Rand C gegen diese Randverteilung konvergiert und umgekehrt $\tilde{u}$ durch seine Randverteilung auf C bestimmt ist. In diesem Sinn besitzt jede innerhalb C, ebenso jede außerhalb C analytische Funktion eine Randverteilung auf C. Diese Randverteilungen sind also die allgemeinsten „Randwerte", die bei analytischen Funktionen auftreten.

Die Konvergenz von $\tilde{u}$ gegen seine Randverteilung u ist eine sehr schwache im allgemeinen Fall, schränkt man die Randverteilungen jedoch ein, so wird die Konvergenz stärker. Es wird hier vor allem der in diesem Zusammenhang besonders interessierende Fall untersucht, daß als Randverteilungen die Distributionen auf C zugelassen sind. Es gilt, daß alle Distributionen Randverteilungen auf C sind, die Randverteilungen auf C stellen also eine Verallgemeinerung des Distributionsbegriffs dar. Es zeigt sich ferner, daß jede Distribution auf C eindeutig in die Summe zweier Distributionen zerfällt, deren eine die Randverteilung einer innerhalb C analytischen Funktion ist, die andere die einer außerhalb C analytischen Funktion, und die Konvergenz gegen den Rand ist die Konvergenz der Distributionentheorie. Die analytischen Funktionen mit Distributionen als Randverteilungen lassen sich funktionentheoretisch in einfacher Weise als die langsam gegen den Rand wachsenden Funktionen charakterisieren.

Damit ist umgekehrt für die Distributionen auf C eine sehr anschauliche Deutung gewonnen, man kann sie sogar mit den Paaren analytischer Funktionen, deren Randverteilung sie sind, identifizieren.

[1]) Die in eckige Klammern gesetzten Zahlen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

Doch sei ausdrücklich betont, daß stets vorausgesetzt wird, daß C nicht durch den Punkt ∞ geht, unsere Resultate beziehen sich also nicht auf den Fall der reellen Geraden G. Auch in diesem Fall kommen wir zu Randverteilungen auf G, die jedoch nicht alle Distributionen auf G als Spezialfälle umfassen, sondern eine andere Art von Größen auf G sind, auf die ich an anderer Stelle zurückzukommen hoffe.

Wir benützen die Theorie der (F)-Räume, wie sie in allgemeiner Form in [1] entwickelt wurde, ziehen aber auch vielfach die speziellere Theorie der vollkommenen Räume aus [4] heran, die im Fall des Einheitskreises besonders einfach zum Ziel führt. Aus der Theorie der Distributionen wird nichts benützt.

1. *Die Räume* $\mathfrak{A}(C)$. Ω bezeichne die RIEMANNsche Zahlenkugel, K den Einheitskreis, $\mathfrak{K}$ das Innere, $\Omega - \overline{\mathfrak{K}}$ das Äußere von K. C sei im folgenden eine einfach geschlossene rektifizierbare Jordankurve, die meist als analytisch vorausgesetzt wird, C geht also nicht durch den Punkt ∞; $\mathfrak{C}$ sei das Innere von C.

Die Gesamtheit der auf C analytischen Funktionen $x(z)$ bildet einen linearen Raum $\mathfrak{A}(C)$, in dem nach [5] folgendermaßen eine Topologie $\mathfrak{T}^{(0)}$ eingeführt wird: C_n', C_n'' seien analytische einfach geschlossene Kurven in $\mathfrak{C}$ bzw. $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$, zwischen denen C liegt; die von C_n' und C_n'' begrenzte abgeschlossene Menge, die C enthält, sei mit $\mathfrak{R}_n$ bezeichnet. Es sei $\mathfrak{R}_1 \supset \mathfrak{R}_2 \supset \ldots$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}_n = C$.

Mit $B(\mathfrak{R}_n)$ wird der Banachraum aller im Innern von $\mathfrak{R}_n$ analytischen und auf dem Rande noch stetigen Funktionen $x(z)$ bezeichnet mit der Norm

$$||x(z)||_n = \sup_{z \in \mathfrak{R}_n} |x(z)|. \tag{1}$$

$\mathfrak{A}(C)$ ist die Vereinigungsmenge aller $B(\mathfrak{R}_n)$, wenn man Funktionen aus verschiedenen $B(\mathfrak{R}_n)$ identifiziert, die auf C übereinstimmen. Die Topologie von $\mathfrak{A}(C)$ ist nun die der lokalkonvexen Hülle der $B(\mathfrak{R}_n)$, d.h. die Nullumgebungen in $\mathfrak{A}(C)$ sind die Mengen

$$U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U^{(n)}, \tag{2}$$

$U^{(n)}$ eine Nullumgebung $||x(z)||_n \leqq \varepsilon_n$ aus $B(\mathfrak{R}_n)$, U die absolutkonvexe Hülle der $U^{(n)}$, d.h. die Menge aller Funktionen

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k, \qquad x_i \in U^{(i)}, \qquad \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| \leqq 1, \qquad k \text{ beliebig.}$$

Eine Folge $x^{(n)} \in \mathfrak{A}(C)$ ist genau dann konvergent im Sinn von $\mathfrak{T}^{(0)}$ gegen ein $x^{(0)} \in \mathfrak{A}(C)$, wenn alle $x^{(n)}$ und $x^{(0)}$ auf einem geeigneten $\mathfrak{R}_k$ analytisch sind und die $x^{(n)}$ auf $\mathfrak{R}_k$ gleichmäßig gegen $x^{(0)}$ konvergieren.

Es ist klar, daß die Topologie $\mathfrak{T}^{(0)}$ zwar die Werte der $x(z)$ außerhalb von C benützt, sie ist aber durch die Werte auf C eindeutig bestimmt. Es ist für das Folgende wichtig, sich vor Augen zu halten, daß die Elemente von $\mathfrak{A}(C)$ streng genommen nur Funktionen $x(t)$ von t auf C sind.

Die Topologie $\mathfrak{T}^{(0)}$ hängt nicht von der speziellen Wahl der Folge $\mathfrak{R}_n$ ab[2]).

2. *Die Randverteilungen auf C.* Als linearer lokalkonvexer Raum hat $\mathfrak{A}(C)$ einen dualen Raum $\mathfrak{A}'(C)$. Dessen Elemente sind also komplexwertige Linearfunktionen $u[x]$ auf $\mathfrak{A}(C)$, die im Sinn von $\mathfrak{T}^{(0)}$ auf $\mathfrak{A}(C)$ stetig sind, d.h. es gibt zu jedem $u \in \mathfrak{A}'(C)$ ein U der Form (2) mit

$$\sup_{x \in U} |u[x]| \leq 1. \tag{3}$$

Nach der Bemerkung vor Nr. 5 in [5] kann man eine stetige Linearfunktion u auf $\mathfrak{A}(C)$ aber auch schon durch die schwächere Forderung erklären, daß für jede Folge $x^{(n)} \in \mathfrak{A}(C)$, die auf einem der $\mathfrak{R}_k$ gleichmäßig gegen ein $x^{(0)} \in \mathfrak{A}(C)$ konvergiert, stets $u[x^{(n)}]$ den Grenzwert $u[x^{(0)}]$ besitzt. Diese auf Silva [7] zurückgehende Formulierung ist für die Anwendungen natürlich besonders bequem.

Ist $h(t)$ eine auf C integrable Funktion, so wird durch

$$h[x] = \frac{1}{2\pi i} \int_C h(t)\, x(t)\, dt, \qquad x(t) \in \mathfrak{A}(C), \tag{4}$$

offenbar eine solche stetige Linearfunktion erzeugt, gewissen Elementen u von $\mathfrak{A}'(C)$ wird man also durch einen Ausdruck der Form (4) Funktionen auf C zuordnen können, doch nicht allen.

Es ist daher naheliegend nach dem Vorbild von L. Schwartz [6] die Elemente von $\mathfrak{A}'(C)$ als verallgemeinerte Funktionen auf C anzusehen, also als auf C erklärte mathematische Größen, die zwar nicht jedem Punkt auf C eine komplexe Zahl als Funktionswert zuordnen, wohl aber jeder auf C analytischen Funktion. Als Größen auf C mögen die Elemente von $\mathfrak{A}'(C)$ aus einem später ersichtlichen Grund als *Randverteilungen auf C* bezeichnet werden.

Diese Randverteilungen auf C sind eine Verallgemeinerung der Schwartzschen Distributionen auf C, wie wir nun zeigen.

Wir setzen jetzt voraus, daß C analytisch ist, d.h. eine Darstellung $t = t(s)$ mit analytischen $t(s)$ und $s(t)$, $s \in K$, $t \in C$, besitzt. Es bezeichne $\mathfrak{E}(C)$ den linearen Raum aller auf C erklärten unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f(t)$. Auf ihm werde nach [6] durch die Folge der Normen

$$|||f|||_p = \sup_{t \in C} \left| \frac{d^p f}{dt^p} \right|, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

eine Topologie $\mathfrak{T}^{(1)}$ eingeführt. $\mathfrak{E}(C)$ ist ein (F)-Raum bezüglich $\mathfrak{T}^{(1)}$.

Durch die Zuordnung

$$f(t) \to g(s) = f\big(t(s)\big) \tag{6}$$

ist dann $\mathfrak{E}(C)$ topologisch isomorph auf $\mathfrak{E}(K)$ abgebildet, wie sich sofort aus der beliebigen Differenzierbarkeit von $t(s)$ und $s(t)$ ergibt.

[2]) Diese Topologie wurde auch unabhängig von L. van Hove eingeführt, vgl. seine in den Mémoires de l'Acad. royale de Belgique erscheinende Arbeit „Topologie des espaces fonctionnels analytiques et des groupes infinis de transformations".

(6) ordnet auch die Teilräume $\mathfrak{A}(C)$ und $\mathfrak{A}(K)$ isomorph bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}^{(0)}$ einander zu.

Satz 1. *Ist C analytisch, so ist $\mathfrak{A}(C)$ ein in $\mathfrak{E}(C)$ im Sinn von $\mathfrak{T}^{(1)}$ dichter linearer Teilraum. $\mathfrak{T}^{(1)}$ ist auf $\mathfrak{A}(C)$ gröber als $\mathfrak{T}^{(0)}$.*

Beweis. $\mathfrak{A}(C)$ ist offenbar linearer Teilraum von $\mathfrak{E}(C)$ und jede $\mathfrak{T}^{(1)}$-Umgebung, die aus allen $x(t) \in \mathfrak{A}(C)$ mit $|||x|||_p \leqq \varepsilon$, $p = 1, \ldots, n$, besteht, umfaßt, wie leicht zu sehen, eine geeignete Umgebung (2), die Topologie $\mathfrak{T}^{(1)}$ ist auf $\mathfrak{A}(C)$ also gröber als die Topologie $\mathfrak{T}^{(0)}$. Bleibt zu zeigen, daß jedes $f(t) \in \mathfrak{E}(C)$ durch Elemente $x(t)$ aus $\mathfrak{A}(C)$ im Sinn von $\mathfrak{T}^{(1)}$ beliebig genau angenähert werden kann. Nach der Bemerkung vor Satz 1 genügt es, dies für $\mathfrak{E}(K)$ zu zeigen.

Wir können die Elemente $f(s) \in \mathfrak{E}(K)$ auch als periodische Funktionen $\hat{f}(\varphi) = f(e^{i\varphi})$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, schreiben, dann ist die durch die Normen

$$(\hat{f})_p = \sup_{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi} \left| \frac{d^p \hat{f}}{d\varphi^p} \right| \tag{7}$$

in $\mathfrak{E}(K)$ eingeführte Topologie wieder $\mathfrak{T}^{(1)}$. Ist

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \xi_n e^{in\varphi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \xi_n s^n \tag{8}$$

die FOURIER-Reihe von $\hat{f}(\varphi)$, so ist die FOURIER-Reihe von $\frac{d^p \hat{f}}{d\varphi^p}$ gleich

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' i^p n^p \xi_n e^{in\varphi} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' i^p n^p \xi_n s^n \text{ [3]} \tag{9}$$

und alle diese Reihen sind gleichmäßig konvergent gegen die zugehörigen $\frac{d^p \hat{f}}{d\varphi^p}$. Die Folge $\hat{f}^N(\varphi) = \sum_{-N}^{+N} \xi_n e^{in\varphi}$, deren Glieder als p-te Ableitung den N-ten Abschnitt von (9) haben, konvergiert also im Sinn der Normen (7) gegen $\hat{f}(\varphi)$, d.h. die in $\mathfrak{A}(K)$ liegende Folge $f^N(s) = \sum_{-N}^{+N} \xi_n s^n$ konvergiert im Sinn von $\mathfrak{T}^{(1)}$ gegen $f(s)$, $\mathfrak{A}(K)$ ist in $\mathfrak{E}(K)$ dicht.

Satz 2. *Ist C analytisch, so ist der Raum $\mathfrak{E}'(C)$ der Distributionen auf C ein Teilraum des Raumes $\mathfrak{A}'(C)$ der Randverteilungen auf C.*

Beweis. Nach Satz 1 ist jede Distribution als $\mathfrak{T}^{(1)}$-stetige Linearfunktion auf $\mathfrak{E}(C)$ erst recht $\mathfrak{T}^{(0)}$-stetige Linearfunktion auf $\mathfrak{A}(C)$ und verschiedene Distributionen auf C erzeugen verschiedene Randverteilungen auf C, da $\mathfrak{A}(C)$ in $\mathfrak{E}(C)$ dicht ist. $\mathfrak{E}'(C)$ ist also Teilraum von $\mathfrak{A}'(C)$.

3. *Darstellung der Randverteilungen durch lokalanalytische Funktionen.* C braucht in dieser Nummer nur als einfach geschlossen und rektifizierbar vorausgesetzt zu werden. Ist λ eine beliebige, aber feste komplexe Zahl aus dem Innern $\mathfrak{G}$ von C, so liegt die Funktion $\frac{1}{z-\lambda}$ in $\mathfrak{A}(C)$, wir können also

[3]) Der Strich am Summenzeichen deutet das Fehlen des Gliedes $n = 0$ an.

den Wert eines $u \in \mathfrak{A}'(C)$ auf $\frac{1}{z-\lambda}$ bilden und erhalten so eine Funktion von λ.

$$\tilde{u}_1(\lambda) = u\left[\frac{1}{z-\lambda}\right], \qquad \lambda \in \mathfrak{C}. \tag{10}$$

Ebenso erklären wir für μ außerhalb C

$$\tilde{u}_2(\mu) = u\left[\frac{1}{\mu-z}\right], \qquad \mu \in \Omega - \overline{\mathfrak{C}}. \tag{11}$$

Es ist nun (vgl. [5]) $\tilde{u}_1(\lambda)$ eine in $\mathfrak{C}$ analytische Funktion, $\tilde{u}_2(\mu)$ eine in $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$ analytische und in ∞ verschwindende Funktion. Der lineare Raum aller in $\mathfrak{C}$ analytischen Funktionen werde mit $P(\mathfrak{C})$ bezeichnet, der aller in $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$ analytischen und in ∞ verschwindenden Funktionen mit $P(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$. Man kann das Paar $(\tilde{u}_1(\lambda), \tilde{u}_2(\mu))$ auch als eine auf $\Omega \quad C$ erklärte lokalanalytische Funktion $\tilde{u}(\nu)$ auffassen und bezeichnet den Raum aller dieser Funktionen mit $P(\Omega - C)$. Es ist also, wenn wir $\tilde{u}_1(\lambda)$ mit $(\tilde{u}_1(\lambda), 0)$ gleichsetzen, analog $\tilde{u}_2(\mu)$ mit $(0, \tilde{u}_2(\mu))$,

$$P(\Omega - C) = P(\mathfrak{C}) \oplus P(\Omega - \overline{\mathfrak{C}}). \tag{12}$$

Die $u \in \mathfrak{A}'(C)$ zugeordnete lokalanalytische Funktion $\tilde{u}(\nu)$ heißt die Fantappièsche Indikatrix von u.

Wir betrachten zwei Beispiele.

a) Ist $x(t) \in \mathfrak{A}(C)$, so wird durch

$$x[y] = \frac{1}{2\pi i} \int_C x(t)\, y(t)\, dt, \qquad y(t) \in \mathfrak{A}(C), \tag{13}$$

ein $x \in \mathfrak{A}'(C)$ erzeugt, die nach (10) und (11) zugeordnete Indikatrix $\tilde{x}(\nu)$ ist ein Paar $(\tilde{x}_1(\lambda), \tilde{x}_2(\mu))$ von Funktionen, deren Randwerte $x_1(t)$ bzw. $x_2(t)$ auf C noch analytisch sind und als Summe $x(t)$ ergeben. Wir bezeichnen den Raum aller dieser $\tilde{x}(\nu)$ mit $R(\Omega - C)$. Die Fantappièsche Indikatrix leistet in diesem Fall die Zerlegung von $x(t)$ in zwei Summanden, die gleichzeitig in $\mathfrak{C}$ bzw. $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$ hinein analytisch fortgesetzt werden.

Wir formulieren diese Tatsache noch etwas präziser.

$R(\overline{\mathfrak{C}})$ sei der lineare Raum aller auf $\overline{\mathfrak{C}}$ analytischen Funktionen, $R(\Omega - \mathfrak{C})$ entsprechend der Raum aller auf $\Omega - \mathfrak{C}$ analytischen, in ∞ verschwindenden Funktionen. Nach dem Muster von Nr. 1 läßt sich in ihnen eine wieder mit $\mathfrak{T}^{(0)}$ bezeichnete Topologie erklären, wenn man an Stelle der $\mathfrak{R}_n$ die Folgen $\mathfrak{C}_1'' > \mathfrak{C}_2'' > \ldots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}_n'' = \overline{\mathfrak{C}}$ bzw. $\mathfrak{C}_1' > \mathfrak{C}_2' > \ldots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}_n' = \Omega - \mathfrak{C}$ benützt, $\mathfrak{C}_n''$ das von C_n'' begrenzte, $\mathfrak{C}$ umschließende Gebiet, $\mathfrak{C}_n'$ entsprechend das von C_n' begrenzte, $\Omega - \mathfrak{C}$ umschließende Gebiet (vgl. auch [5], Nr. 4).

$R(\Omega - C) = R(\overline{\mathfrak{C}}) \oplus R(\Omega - \mathfrak{C})$ erhält die Topologie des direkten Produkts, die ebenfalls mit $\mathfrak{T}^{(0)}$ bezeichnet wird. Es gilt dann

Satz 3. *Ordnet man jedem* $x(t) \in \mathfrak{A}(C)$ *durch* (13), (10), (11) *die Indikatrix* $\tilde{x}(\nu)$ *zu, so erhält man eine topologische Isomorphie*

$$\mathfrak{A}(C) \cong R(\Omega - C) = R(\overline{\mathfrak{C}}) \oplus R(\Omega - \mathfrak{C}), \tag{14}$$

wobei in jedem der Räume die Topologie $\mathfrak{T}^{(0)}$ *zu nehmen ist.*

Dies ist in den Resultaten von [5] enthalten, ist aber auch leicht unmittelbar einzusehen.

Es sei bemerkt, daß $\tilde{x}(\nu)$ nach (10), (11) nicht auf C definiert ist, die Funktionen aus $R(\overline{\mathfrak{C}})$ sind also unmittelbar nur auf $\mathfrak{C}$ erklärt, ebenso die von $R(\Omega - \mathfrak{C})$ nur auf $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$. Durch die Isomorphie (14) wird nun $R(\overline{\mathfrak{C}})$ einem Teilraum $\mathfrak{R}(\overline{\mathfrak{C}})$ von $\mathfrak{A}(C)$ zugeordnet, der gerade aus den durch die Randfunktionen $x_1(t)$ der $\tilde{x}_1(\lambda) \in R(\overline{\mathfrak{C}})$ erzeugten Randverteilungen x_1 besteht. Ebenso entspricht $\tilde{x}_2(\mu)$ eine Randverteilung x_2 und es ist $x = x_1 + x_2$.

Wir notieren die (14) so entsprechende Zerlegung

$$\mathfrak{A}(C) = \mathfrak{R}(\overline{\mathfrak{C}}) \oplus \mathfrak{R}(\Omega - \mathfrak{C}). \tag{14'}$$

b) Als Beispiel für die Darstellung einer Distribution betrachten wir das DIRACsche Maß δ_{t_0}, das jeder stetigen Funktion $f(t)$ auf der Kurve C den Wert $\delta_{t_0}[f] = f(t_0)$ zuordnet. Offenbar ist $\delta_{t_0} \in \mathfrak{A}'(C)$, die zugeordnete lokalanalytische Funktion ist

$$\tilde{\delta}_{t_0}(\nu) = \left(\frac{1}{t_0 - \lambda}, \frac{1}{\mu - t_0}\right). \tag{15}$$

Der Grenzübergang von beiden Seiten zum Rand C und Addition der Randwerte wie im vorigen Beispiel ergibt für $t \neq t_0$ den Wert 0, für $t = t_0$ den Wert ∞. Also auch in diesem Fall ist die Linearfunktion δ_{t_0} anschaulich als Randfunktion einer lokalanalytischen Funktion aufzufassen. Dies wird noch exakt zu erfassen sein.

4. $\mathfrak{A}'(C)$ *als lokalkonvexer Raum.* Als Topologie in $\mathfrak{A}'(C)$ führt man nun die starke Topologie ein, also die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den beschränkten Teilmengen von $\mathfrak{A}(C)$. Wir brauchen sie nicht näher zu erläutern, da die Ergebnisse von [5] eine direkte Definition gestatten.

In $P(\mathfrak{C})$ erklären wir folgendermaßen eine Topologie $\mathfrak{T}^{(2)}$: Es sei wieder C_n' die C von innen her approximierende Kurvenfolge und $\mathfrak{T}_n'$ sei die von C_n' begrenzte abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{C}$. $P(\mathfrak{C})$ wird ein (F)-Raum, wenn man die Folge wachsender Normen

$$||\tilde{u}_1(\lambda)||_n = \sup_{\lambda \in \mathfrak{T}_n'} |\tilde{u}_1(\lambda)|, \qquad \tilde{u}_1 \in P(\mathfrak{C}), \tag{16}$$

einführt. Ist $\mathfrak{T}_n''$ das Äußere von C_n'' einschließlich C_n'' selbst, so gibt die entsprechende Definition

$$||\tilde{u}_2(\mu)||_n = \sup_{\mu \in \mathfrak{T}_n''} |\tilde{u}_2(\mu)|, \qquad \tilde{u}_2 \in P(\Omega - \overline{\mathfrak{C}}), \tag{17}$$

die Topologie $\mathfrak{T}^{(2)}$ auf $P(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$.

$P(\Omega - C)$ erhält nach (12) die wieder mit $\mathfrak{T}^{(2)}$ bezeichnete Produkttopologie.

Die Konvergenz einer Folge $\tilde{u}^{(n)}(\nu) = (\tilde{u}_1^{(n)}(\lambda), \tilde{u}_2^{(n)}(\mu))$ ist dann gleichbedeutend mit der gleichmäßigen Konvergenz von $\tilde{u}_1^{(n)}(\lambda)$ bzw. $\tilde{u}_2^{(n)}(\mu)$ auf einem geeigneten $\mathfrak{D}_n'$ bzw. $\mathfrak{D}_n''$.

Nach [5] gilt nun

Satz 4. *Die Zuordnung $u \to \tilde{u}(\nu)$ von $u \in \mathfrak{A}'(C)$ auf $\tilde{u}(\nu) \in P(\Omega - C)$ ist eine topologische Isomorphie*

$$\mathfrak{A}'(C) \cong P(\Omega - C), \tag{18}$$

die starke Topologie auf $\mathfrak{A}'(C)$ ist also nichts anderes als die durch diese Isomorphie auf $\mathfrak{A}'(C)$ übertragene Topologie $\mathfrak{T}^{(2)}$.

Der direkten topologischen Zerlegung (14') entspricht beim Übergang zum dualen Raum eine ebensolche Zerlegung

$$\mathfrak{A}'(C) = \mathfrak{R}'(\overline{\mathfrak{C}}) \oplus \mathfrak{R}'(\Omega - \mathfrak{C}). \tag{19}$$

Nach [5] gilt ferner

Satz 5. *Der topologische Isomorphismus (18) setzt sich zusammen aus den beiden topologischen Isomorphismen*

$$\mathfrak{R}'(\overline{\mathfrak{C}}) \cong P(\Omega - \overline{\mathfrak{C}}), \tag{20}$$

$$\mathfrak{R}'(\Omega - \mathfrak{C}) \cong P(\mathfrak{C}). \tag{21}$$

Den Zuordnungen (14) und (18) entspricht nun folgende Berechnung des Wertes einer Randverteilung (Formel (13) aus [5]).

Satz 6. *Entspricht $x(t) = x_1(t) - x_2(t) \in \mathfrak{R}(\overline{\mathfrak{C}}) \oplus \mathfrak{R}(\Omega - \mathfrak{C})$ nach (14) die lokalanalytische Funktion $(\tilde{x}_1(\lambda), \tilde{x}_2(\mu)) \in R(\overline{\mathfrak{C}}) \oplus R(\Omega - \mathfrak{C})$ und $u = u_1 + u_2 \in \mathfrak{R}'(\Omega - \mathfrak{C}) \oplus \mathfrak{R}'(\overline{\mathfrak{C}})$ nach (19), (20), (21) die lokalanalytische Funktion $(\tilde{u}_1(\lambda), \tilde{u}_2(\mu)) \in P(\mathfrak{C}) \oplus P(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$, so gilt*

$$\begin{aligned} u[x(t)] &= u_1[x_2(t)] + u_2[x_1(t)] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n'} \tilde{u}_1(\lambda)\, \tilde{x}_2(\lambda)\, d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n''} \tilde{u}_2(\mu)\, \tilde{x}_1(\mu)\, d\mu, \end{aligned} \tag{22}$$

wobei n so groß zu wählen ist, daß $\tilde{x}_2(\lambda)$ noch auf C_n' und $\tilde{x}_1(\mu)$ noch auf C_n'' analytisch sind. Die Kurven sind stets im positiven Sinn zu durchlaufen.

Die Formel (22) erklärt auch umgekehrt die einem $\tilde{u}(\nu) \in P(\Omega - C)$ zugeordnete Randverteilung u.

Nach [5] Satz 17 gilt

Satz 7. *Die stark dualen Räume zu $\mathfrak{A}'(C)$, $P(\mathfrak{C})$, $P(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ sind $\mathfrak{A}(C)$, $R(\Omega - \mathfrak{C})$, $R(\overline{\mathfrak{C}})$.*

In den beiden letzten Fällen ist die duale Paarung durch je eines der Integrale aus (22) gegeben.

Satz 8. *Alle Räume $\mathfrak{A}(C)$, ebenso alle Räume $\mathfrak{A}'(C)$ sind topologisch isomorph, C irgendeine geschlossene rektifizierbare Jordankurve.*

Zeigen wir dies für die $\mathfrak{A}'(C)$, so ergibt sich die Behauptung für die $\mathfrak{A}(C)$ nach Satz 7 durch Dualität. Es genügt nach Satz 4 und 5 aber, die Behauptung für $P(\mathfrak{K})$ und $P(\mathfrak{C})$ zu zeigen. Ist aber $\lambda = \varphi(\xi)$ eine konforme Abbildung von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{C}$, so ist die Zuordnung $\tilde{u}_1(\lambda) \to \tilde{v}_1(\xi) = \tilde{u}_1(\varphi(\xi))$ eine topologische Isomorphie, was sofort mit Hilfe der Normen (16) einzusehen ist. Analog für $P(\Omega - \overline{\mathfrak{K}})$ und $P(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$.

Satz 9. *$\mathfrak{A}(C)$ ist ein im Sinn von $\mathfrak{T}^{(2)}$ dichter linearer Teilraum von $\mathfrak{A}'(C)$, ebenso $R(\overline{\mathfrak{C}})$ von $P(\mathfrak{C})$ und $R(\Omega - \mathfrak{C})$ von $P(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$.*

Es genügt wiederum, dies für $R(\overline{\mathfrak{C}})$ und $P(\mathfrak{C})$ zu zeigen. $R(\overline{\mathfrak{C}})$ ist nach Satz 7 dicht in $P(\mathfrak{C})$, wenn der Orthogonalraum zu $R(\overline{\mathfrak{C}})$ in $R(\Omega - \mathfrak{C})$ verschwindet. Es ist für $\lambda_0 \in \Omega - \overline{\mathfrak{C}}$ aber $\frac{1}{\lambda - \lambda_0} \in R(\overline{\mathfrak{C}})$, für ein dem Orthogonalraum angehöriges $\tilde{x}(\mu) \in R(\Omega - \mathfrak{C})$ ergibt sich nach (22) also $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n'} \frac{\tilde{x}(\mu)}{\lambda_0 - \mu} d\mu = \tilde{x}(\lambda_0) = 0$.

5. *Die Konvergenz gegen den Rand.* Es ergibt sich nun leicht die in der Bezeichnung „Randverteilung" angedeutete funktionentheoretische Bedeutung der Elemente von $\mathfrak{A}'(C)$.

Sei zuerst C gleich dem Einheitskreis K und sei $u = u_1 + u_2$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{A}'(K)$, $\tilde{u}(v) = (\tilde{u}_1(\lambda), \tilde{u}_2(\mu))$ seine Indikatrix. Den Funktionen $\tilde{u}_r(v) = (\tilde{u}_1(r\lambda), \tilde{u}_2(\mu/r))$, $0 < r < 1$, die wir als die *konzentrischen Näherungen* von $\tilde{u}(v)$ bezeichnen, entsprechen in $\mathfrak{A}'(K)$ die sogar zu $\mathfrak{A}(K)$ gehörenden $u_r(s) = u_1(rs) + u_2(s/r)$, $s \in K$. Diese Randverteilungen konvergieren nun im Sinn der Topologie $\mathfrak{T}^{(2)}$ von $\mathfrak{A}'(K)$ gegen u, es gilt

Satz 10. *Ist $u \in \mathfrak{A}'(K)$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in \mathfrak{R}'(\Omega - \mathfrak{K})$, $u_2 \in \mathfrak{R}'(\overline{\mathfrak{K}})$, und sind $\tilde{u}_1(\lambda) \in P(\mathfrak{K})$, $\tilde{u}_2(\mu) \in P(\Omega - \overline{\mathfrak{K}})$ die zugeordneten Funktionen, sind ferner $\tilde{u}_{1r}(\lambda) = \tilde{u}_1(r\lambda)$, $\tilde{u}_{2r}(\mu) = \tilde{u}_2(\mu/r)$ die konzentrischen Näherungen mit den analytischen Randverteilungen $u_{1r}(s)$ bzw. $u_{2r}(s)$, so gilt*

$$u_1 = \lim_{r \to 1-0} u_{1r}, \qquad u_2 = \lim_{r \to 1-0} u_{2r} \tag{23}$$

im Sinn der $\mathfrak{T}^{(2)}$-Konvergenz in $\mathfrak{A}'(K)$.

Der Beweis ist einfach: $u_{1r} \to u_1$ bedeutet nach Satz 4 ja nichts anderes als die gleichmäßige Konvergenz der zugeordneten Funktionen $\tilde{u}_1(r\lambda)$ gegen $\tilde{u}_1(\lambda)$ auf jeder abgeschlossenen Teilmenge von $\mathfrak{K}$.

Die Konvergenz gegen die Randverteilung ist sogar monoton in bezug auf jede der zur Topologie $\mathfrak{T}^{(2)}$ gehörenden Normen $||u_1||_\varrho = \sup_{\lambda \leq \varrho} |\tilde{u}_1(\lambda)|$, $0 < \varrho < 1$, denn $||u_{1r}||_\varrho$ ist eine monoton wachsende Funktion von r mit dem Limes $||u_1||_\varrho$ für $r \to 1$. Entsprechendes gilt für die u_{2r}.

Satz 10 ergibt nach den Sätzen 4 und 6 auch, daß *jede in $|z| > 1$ bzw. $|z| < 1$ analytische Funktion eine Randverteilung besitzt, gegen die die konzentrischen Näherungen im Sinn der Topologie $\mathfrak{T}^{(2)}$ konvergieren.*

Ist C allgemeiner eine analytische Kurve $t(s)$, $s \in K$, so überträgt sich Satz 10 durch konforme Abbildung: Es sei $\lambda = \varphi(\xi)$ die konforme Abbildung

von $\overline{\mathfrak{R}}$ auf $\overline{\mathfrak{C}}$, $\xi = \psi(\lambda)$ die Umkehrung. Ist $u_1 \in \mathfrak{R}'(\Omega \quad \mathfrak{C})$, $\tilde{u}_1(\lambda)$ die Indikatrix in $P(\mathfrak{C})$, so ist $\tilde{v}_1(\xi) = \tilde{u}_1(\varphi(\xi)) \in P(\mathfrak{R})$ und seine Randverteilung v_1 ist in $\mathfrak{R}'(\Omega - \mathfrak{R})$ nach Satz 10 Limes der $v_1(r\,s) \in \mathfrak{R}(\overline{\mathfrak{R}})$. Die Funktionen $\tilde{u}_{1r}(\lambda) - \tilde{v}_1(r\,\psi(\lambda)) = \tilde{u}_1(\varphi(r\,\psi(\lambda))) \in R(\overline{\mathfrak{C}})$ haben dann auf C die Werte von $\tilde{u}_1(\lambda)$ auf den Bildkurven C_r der Kreise $\xi = r$, werden also wieder als konzentrische Näherungen von $\tilde{u}_1(\lambda)$ zu bezeichnen sein. Die Konvergenz der $u_{1r}(\lambda)$ gegen $\tilde{u}_1(\lambda)$ ist wieder gleichmäßig auf allen abgeschlossenen Teilmengen innerhalb C, also sind die u_{1r} $\mathfrak{T}^{(2)}$-konvergent gegen u_1. Diese Konvergenz ist ferner monoton bezüglich der Normen $\|u_1\|_\varrho = \sup_{\lambda \in \mathfrak{C}_\varrho} |\tilde{u}_1(\lambda)|$, $\mathfrak{C}_\varrho$ das von C_ϱ umschlossene Gebiet. Analoges gilt für die $u_2 \in \mathfrak{R}'(\overline{\mathfrak{C}})$.

Die Konvergenz der konzentrischen Näherungen gegen die Randverteilung im Sinn der Topologie $\mathfrak{T}^{(2)}$ ist sehr schwach, schärfere Aussagen kann man jedoch nur erwarten, wenn man die Singularitäten auf dem Rande irgendwie einschränkt. Im Sinne der hier entwickelten Auffassung wird dies zweckmäßig so zu geschehen haben, daß man nicht alle Elemente von $\mathfrak{A}'(C)$ als Randverteilungen der Funktionen zuläßt, sondern geeignete lineare Teilräume von $\mathfrak{A}'(C)$ auswählt. Als Spielraum hat man naturgemäß die zwischen $\mathfrak{A}(C)$, dem Raum der analytischen Funktionen, und $\mathfrak{A}'(C)$ gelegenen linearen Räume.

Als Beispiele bieten sich an für analytische C die Räume $L^p(C)$, der Raum der stetigen Funktionen auf C, der Raum der Maße auf C, die Räume $\mathfrak{E}(C)$ und $\mathfrak{E}'(C)$ usw. Für die $L^p(K)$, $1 < p < \infty$, hat kürzlich A. E. Taylor [8] diese Probleme behandelt. Auch hier gilt der (19) entsprechende Zerlegungssatz, daß $L^p(K)$ in zwei topologisch komplementäre Teilräume zerfällt, die die Randfunktionen von in $\mathfrak{R}$ bzw. $\Omega - \overline{\mathfrak{R}}$ analytischen Funktionen sind, ferner ist die Konvergenz der konzentrischen Näherungen gegen diese Randfunktion nichts anderes als die starke Konvergenz in $L^p(K)$.

Aber schon für $L^1(K)$ gilt ein solcher Zerlegungssatz nicht mehr, nach einem klassischen Beispiel der Theorie der Fourier-Reihen (vgl. [8] oder Titchmarsh, The theory of functions, 2. Aufl. S. 420) können die einer auf K integrablen Funktion $x(s)$ zugeordneten analytischen Funktionen $\tilde{x}_1(\lambda)$ und $\tilde{x}_2(\mu)$ Randverteilungen haben, die nicht mehr in $L^1(K)$ liegen.

Das Problem, für welche Teilräume von $\mathfrak{A}'(C)$ der Zerlegungssatz richtig ist, scheint ein recht schwieriges zu sein. Wir begnügen uns hier damit, die beiden aufgeworfenen Fragen für die Räume $\mathfrak{E}(C)$ und $\mathfrak{E}'(C)$ zu beantworten, die ziemlich einfach zu behandeln sind, da im Fall K die Fourier-Entwicklung auf vollkommene Räume im Sinn von [4] führt.

6. $\mathfrak{E}(K)$ *und* $\mathfrak{E}'(K)$ *als vollkommene Räume.* L. Schwartz hat in [6] Bd. II, S. 80ff., eine Darstellung von $\mathfrak{E}(K)$ und $\mathfrak{E}'(K)$ durch vollkommene Räume gegeben, die wir in etwas anderer Form kurz wiedergeben.

Ist $x(s) \in \mathfrak{E}(K)$, $\hat{x}(\varphi) = x(e^{i\varphi})$ die entsprechende periodische Funktion, so werde $x(s)$ der Vektor $\mathfrak{x} = (\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots)$ der Fourier-Koeffizienten von $\hat{x}(\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \xi_n e^{i n \varphi}$ zugeordnet. Es gilt in der Bezeichnung von [4]

Satz 11. *Der $\mathfrak{E}(K)$ durch $x(s) \to \mathfrak{x}$ zugeordnete Koordinatenraum ε ist ein gestufter Raum, der aus allen $\mathfrak{x}$ mit*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' |n^k \xi_n| < \infty, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{24}$$

besteht.

Dies ergibt sich sofort daraus, daß einerseits $\dot{x}^{(k)}(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' i^k n^k \xi_n e^{inq}$ für jedes k beschränkte Koeffizienten hat, andererseits eine FOURIER-Reihe mit Koeffizienten ξ_n, die (24) erfüllen, eine unendlich oft differenzierbare Funktion darstellt.

ε wird von SCHWARTZ als Raum der rasch abnehmenden Folgen bezeichnet.

Die entsprechende Darstellung von $\mathfrak{E}'(K)$ findet man folgendermaßen: Die FOURIER-Reihe von $\dot{x}(q)$ konvergiert nach Nr. 2 im Sinn der Topologie $\mathfrak{T}^{(1)}$ von $\mathfrak{E}(K)$ gegen $\dot{x}(q)$, also ist eine Distribution u durch ihre Werte $u[e^{inq}] = \nu_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, auf den e^{inq} bestimmt. Diese bilden wieder einen Vektor $\mathfrak{u}$ und es gilt

Satz 12. *Der $\mathfrak{E}'(K)$ durch $u \to \mathfrak{u}$ zugeordnete Koordinatenraum ε^* ist der zu ε duale Stufenraum aller $\mathfrak{u}$ mit*

$$|\nu_n| \leqq M |n|^k, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{25}$$

für geeignetes M und k. Der Wert $u[x]$ der Distribution u auf $x \in \mathfrak{E}(K)$ ergibt sich durch

$$u[x] = \mathfrak{u}\,\mathfrak{x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \nu_n \xi_n \qquad \text{(Parseval)}. \tag{26}$$

Beweis. Die Gl. (26) folgt aus der Definition von $\mathfrak{u}$, die Summe ist absolut konvergent, da $\mathfrak{u}$ auch auf jedes $\mathfrak{y}$ mit $\eta_n = \xi_n$ anwendbar sein muß. Der zu ε im Sinn der vollkommenen Räume duale Stufenraum besteht nach [4] § 1 Satz 2 gerade aus allen $\mathfrak{u}$, die (25) erfüllen.

Bleibt noch zu zeigen, daß jedes $\mathfrak{u}$ einer Distribution entspricht. Da jedes $\mathfrak{u}$ nach [4] § 4 Satz 1 eine stark stetige Linearfunktion auf ε ist, genügt es zu beweisen, daß bei der Zuordnung $x \to \mathfrak{x}$ die Topologie $\mathfrak{T}^{(1)}$ auf $\mathfrak{E}(K)$ in die starke Topologie $\mathfrak{T}_b$ auf ε übergeht.

Die beschränkten Mengen in ε^* sind nach [4] § 1 Satz 5 enthalten in den beschränkten Mengen $B_{M,k}$ aller $\mathfrak{u}$, die (25) für ein festes M und k erfüllen. Die starke Topologie in ε wird also durch die Umgebungen

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' |n^k \xi_n| < \delta \tag{27}$$

für festes k und M gegeben. Sie stimmt mit $\mathfrak{T}^{(1)}$ überein: Für die $\dot{x}(q)$ einer Umgebung $(\dot{x})_k < \delta$ [vgl. (7)] sind die Ausdrücke $\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} x^{(k)}(q)^2 dq = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' |n^k \xi_n|^2$ beschränkt, also nach der SCHWARZschen Ungleichung auch $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' |n^{k-1}\xi_n|$, eine

$\mathfrak{T}^{(1)}$-Umgebung $(\dot{x})_{k+1} < \delta'$ liegt also in einer Umgebung (27), umgekehrt folgt aus (27), daß die ersten bis k-ten Ableitungen der $x(q)$ beschränkt sind, jede $\mathfrak{T}^{(1)}$-Umgebung $(\dot{x})_k < \delta'$ umfaßt also eine Umgebung (27), $\mathfrak{E}(K)$ ist also topologisch isomorph dem zugeordneten vollkommenen Raum ε bezüglich der starken Topologie.

Die wesentlichen Eigenschaften von $\mathfrak{E}(K)$ und $\mathfrak{E}'(K)$ können somit der Theorie der Stufenräume [4] entnommen werden. Sie gelten nach (6) damit auch für $\mathfrak{E}(C)$ und $\mathfrak{E}'(C)$ mit beliebigen analytischen C.

7. *$\mathfrak{A}(K)$ und $\mathfrak{A}'(K)$ als vollkommene Räume.* Auch für $\mathfrak{A}(K)$, $\mathfrak{A}'(K)$ ergeben sich Darstellungen durch vollkommene Räume. Sie sind in [9] und [4] ausführlich erörtert worden, wir fassen die uns hier interessierenden Ergebnisse zusammen in

Satz 13. *Ordnet man jedem $\tilde{x}_1(\lambda) \in R(\overline{\mathfrak{K}})$ den Vektor $\mathfrak{x}_1 = (\xi_0, \xi_1, \ldots)$ der Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung in 0, jedem $\tilde{x}_2(\mu) \in R(\Omega - \mathfrak{K})$ den Vektor $\mathfrak{x}_2 = (\ldots, \xi_{-2}, \xi_{-1})$ der Koeffizienten der Potenzreihe in $1/\mu$ zu, so erhält man die Stufenräume ϱ_1 bzw. $\bar{\varrho}_1$, die aus allen $\mathfrak{x}_1$ bzw. $\mathfrak{x}_2$ mit*

$$(28) \qquad |\xi_n| \leq M\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n \qquad \text{bzw.} \qquad |\xi_{-n}| \leq M\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

für geeignetes M und k bestehen, k eine der Zahlen $2, 3, \ldots$.

Erklärt man in ϱ_1, bzw. $\bar{\varrho}_1$ die starke Topologie, so ist die Zuordnung eine topologische Isomorphie.

Die dualen gestuften Räume $\varrho_1^* = \pi_1$, $\bar{\varrho}_1^* = \bar{\pi}_1$ sind dann zu $P(\Omega - \overline{\mathfrak{K}})$ bzw. $P(\mathfrak{K})$ topologisch isomorph. π_1 bzw. $\bar{\pi}_1$ bestehen aus allen Vektoren $\mathfrak{u}_2 = (v_0, v_1, \ldots)$ bzw. $\mathfrak{u}_1 = (\ldots, v_{-2}, v_{-1})$ mit

$$(29) \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n |v_n| < \infty \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n |v_{-n}| < \infty, \quad k = 2, 3, \ldots.$$

Die Isomorphie ordnet den Vektoren $\mathfrak{u}_2$ bzw. $\mathfrak{u}_1$ die Funktionen

$$(30) \qquad \tilde{u}_2(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{\mu^{n+1}} \qquad \text{bzw.} \qquad \tilde{u}_1(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{-n}\, \lambda^{n-1}$$

zu, man erhält somit

$$(31) \qquad u_2[\tilde{x}_1(s)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_n''} \tilde{u}_2(\mu)\, \tilde{x}_1(\mu)\, d\mu = \mathfrak{u}_2 \mathfrak{x}_1 = \sum_{0^*}^{\infty} v_n \xi_n$$

$$(32) \qquad u_1[\tilde{x}_2(s)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_n'} \tilde{u}_1(\lambda)\, \tilde{x}_2(\lambda)\, d\lambda = \mathfrak{u}_1 \mathfrak{x}_2 = \sum_{1}^{\infty} v_{-n} \xi_{-n}.$$

Die Räume $\mathfrak{A}(K)$ und $\mathfrak{A}'(K)$ werden dann durch die Räume $\bar{\varrho}_1 \oplus \varrho_1$ bzw. $\bar{\pi}_1 \oplus \bar{\pi}_1$ der Paare $\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1)$ bzw. $\mathfrak{u} = (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2)$ mit der Bilinearform

$$(33) \qquad \mathfrak{u}\,\mathfrak{x} = (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2)(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1) = \mathfrak{u}_1 \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{x}_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n \xi_n$$

dargestellt.

Die Elemente von $\mathfrak{A}(K)$ lassen sich als Elemente von $\mathfrak{E}(K)$ auffassen, ebenso die Elemente von $\mathfrak{E}'(K)$ als Elemente von $\mathfrak{A}'(K)$, beide Male entspricht ihnen nach Nr. 6 und der Zuordnung von Satz 13 derselbe Vektor $\mathfrak{x}$ bzw. $\mathfrak{u}$.

Durch Vergleich von (25) und (29) erhält man bereits einen gewissen Überblick über die Randverteilungen auf K, die keine Distributionen sind.

Schreiben wir die $x(s) \in \mathfrak{A}(K)$ wieder als $\hat{x}(\varphi) = x(e^{i\varphi})$, so erhalten wir den Raum der analytischen periodischen Funktionen. Die Elemente von $\mathfrak{A}'(K)$ können dann ebenfalls als die Summen der FOURIER-Reihen $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n e^{in\varphi}$ angesehen werden, die (29) genügen. Damit können also noch mehr FOURIER-Reihen summiert werden als in der Distributionentheorie.

8. *Der Zerlegungs- und Approximationssatz für* $\mathfrak{E}(K)$. Ein $f(t) \in \mathfrak{E}(C)$ erzeugt nach (4) eine stetige Linearfunktion $f[x]$ auf $\mathfrak{A}(C)$, wir fassen in diesem Sinn $\mathfrak{E}(C)$ als Teilraum von $\mathfrak{A}'(C)$ auf. Die $f(t)$ zugeordnete Indikatrix wird also gegeben durch

$$(34) \qquad \tilde{f}(\nu) = \left(\tilde{f}_1(\lambda),\ \tilde{f}_2(\mu)\right) = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t-\lambda},\ \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{\mu - t}\right),\quad \lambda \in \mathfrak{C},\ \mu \in \Omega - \overline{\mathfrak{C}}.$$

Die $\tilde{f}_1(\lambda)$ bzw. $\tilde{f}_2(\mu)$ bilden Teilräume $E(\mathfrak{C})$ bzw. $E(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ von $P(\Omega - C)$ und erzeugen nach (22) stetige Linearfunktionen auf $\mathfrak{A}(C)$; die $E(\mathfrak{C})$ und $E(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ so entsprechenden Teilräume von $\mathfrak{A}'(C)$ werden mit $\mathfrak{E}(\mathfrak{C})$ bzw. $\mathfrak{E}(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ bezeichnet.

Für $C = K$ beweisen wir nun den Zerlegungssatz

Satz 14. *Es ist* $\mathfrak{E}(K)$ *die direkte topologische Summe*

$$(35) \qquad \mathfrak{E}(K) = \mathfrak{E}(\mathfrak{K}) \oplus \mathfrak{E}(\Omega - \overline{\mathfrak{K}}).$$

Beweis. Ist $f(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n s^n \in \mathfrak{E}(K)$, so ist nach (34) $\tilde{f}_1(\lambda) = \sum_0^\infty \xi_n \lambda^n$, $\tilde{f}_2(\mu) = \sum_1^\infty \xi_{-n} \mu^{-n}$. Die ξ_n, ξ_{-n} erfüllen die Ungleichungen (24), die Funktionen $f_1(s) = \sum_0^\infty \xi_n s^n$ bzw. $f_2(s) = \sum_1^\infty \xi_{-n} s^{-n}$, $s \in K$, liegen nach Satz 11 also in $\mathfrak{E}(K)$.

Die durch $\tilde{f}_1(\lambda)$ nach (22) erzeugte Linearfunktion

$$f_1[x] = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda| = r} \tilde{f}_1(\lambda)\,\tilde{x}_2(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_K \tilde{f}_1(rs)\,\tilde{x}_2(rs)\,r\,ds, \qquad \tilde{x}_2(\mu) \in R(\Omega - \mathfrak{K}),$$

ist aber gleich $\frac{1}{2\pi i}\int f_1(s)\,\tilde{x}_2(s)\,ds$, da $\tilde{f}_1(rs)$ mit $r \to 1$ gleichmäßig gegen $f_1(s)$ geht, was sich leicht aus (24) ergibt. Dasselbe gilt für $\tilde{f}_2(\mu)$ und $f_2(s)$.

Daß die Zerlegung $f(s) = f_1(s) + f_2(s)$ direkt topologisch ist, ergibt sich sofort daraus, daß die entsprechende Zerlegung des vollkommenen Raumes ε, bei der jeder Vektor $\mathfrak{x} = (\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots)$ in die beiden Vektoren $(\ldots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, 0, 0, \ldots)$ und $(\ldots, 0, 0, \xi_0, \xi_1, \ldots)$ zerlegt wird, topologisch direkt ist.

$E(\mathfrak{K})$ und $E(\Omega - \overline{\mathfrak{K}})$ lassen sich funktionentheoretisch einfach charakterisieren,

Satz 15. *$E(\mathfrak{K})$ ist der Raum aller in $\mathfrak{K}$ analytischen Funktionen, deren sämtliche Ableitungen in $\mathfrak{K}$ beschränkt sind, $E(\Omega - \overline{\mathfrak{K}})$ ist der Raum aller in $\Omega - \overline{\mathfrak{K}}$ analytischen und in ∞ verschwindenden Funktionen, deren sämtliche Ableitungen in $\Omega - \overline{\mathfrak{K}}$ beschränkt sind.*

Denn sind sämtliche Ableitungen von $\tilde{f}(\lambda) = \sum_0^\infty \xi_n \lambda^n$ in $\mathfrak{K}$ beschränkt, so folgt aus dem CAUCHYschen Koeffizientensatz für die k-te Ableitung $\binom{n}{k}|\xi_n| \leq M_k$, der Vektor der ξ_n erfüllt (24). Ebenso folgt aus (24), daß $\tilde{f}(\lambda)$ in $\mathfrak{K}$ nur beschränkte Ableitungen hat.

Da $E(\Omega - \overline{\mathfrak{K}})$ durch den Übergang von $\tilde{f}(\lambda)$ zu $\frac{1}{\mu}\tilde{f}\left(\frac{1}{\mu}\right)$ aus $E(\mathfrak{K})$ entsteht, gilt die Behauptung auch für $E(\Omega - \overline{\mathfrak{K}})$.

Die Topologie $\mathfrak{T}^{(1)}$ von $\mathfrak{E}(K)$ ist durch die Folge der Normen (5) gegeben. Damit ist auf $\mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ als Teilraum von $\mathfrak{E}(K)$ ebenfalls die Topologie $\mathfrak{T}^{(1)}$ erklärt. Sie überträgt sich auf $E(\mathfrak{K})$ mit Hilfe der aus (24) folgenden gleichmäßigen Konvergenz der n-ten Ableitungen $\tilde{f}_1^{(n)}(r\,s)$ gegen die Randfunktion $f_1^{(n)}(s)$ und man erhält in $E(\mathfrak{K})$ die Normen

$$(36) \qquad |||f_1|||_n = \sup_{|\lambda|<1} |\tilde{f}_1^{(n)}(\lambda)| = \sup_{|s|=1} |f_1^{(n)}(s)| = |||f_1|||_n .$$

Analoges gilt für $E(\Omega - \overline{\mathfrak{K}})$. Daraus ergibt sich sofort der in $\mathfrak{E}(K)$ zu erwartende Approximationssatz

Satz 16. *Die konzentrischen Näherungen $f_1(r\,s) + f_2(s/r)$ einer Randverteilung $f(s) \in \mathfrak{E}(K)$ streben monoton in r bezüglich jeder der $\mathfrak{T}^{(1)}$ definierenden Normen* (36) *gegen $f(s)$.*

Wir bemerken noch, daß $E(\mathfrak{K})$ und $E(\Omega - \overline{\mathfrak{K}})$ offenbar topologisch isomorph zu gestuften Räumen sind, die Ergebnisse von [1] und [4] lassen sich also wieder anwenden.

9. *Der allgemeine Fall einer analytischen Kurve C.* Zwar ist $\mathfrak{E}(C)$ nach (6) topologisch isomorph $\mathfrak{E}(K)$, dabei geht die Zerlegung (35) in eine direkte topologische Zerlegung von $\mathfrak{E}(C)$ über, doch ist dies nicht die des Zerlegungssatzes für $\mathfrak{E}(C)$. Der Beweis ist in diesem Fall etwas schwieriger.

Satz 17. *Ist C eine analytische geschlossene Jordankurve, so ist $\mathfrak{E}(C)$ die direkte topologische Summe*

$$(37) \qquad \mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}(\mathfrak{C}) \oplus \mathfrak{E}(\Omega - \overline{\mathfrak{C}}) .$$

Beweis. a) Wir zeigen zuerst, daß $\mathfrak{E}(\mathfrak{C})$ ein Teilraum von $\mathfrak{E}(C)$ ist, d.h. daß die durch ein $\tilde{f}_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-\lambda}\,dt, f(t) \in \mathfrak{E}(C)$, erzeugte Randverteilung f_1 in $\mathfrak{E}(C)$ liegt.

Wir formen dazu $\tilde{f}_1(\lambda)$ durch partielle Integration um. Es ist für festes $\lambda \in \mathfrak{C}$ $\ln(t-\lambda)$ nicht eindeutig auf C erklärbar. Wir denken uns C bei t_0 durchgeschnitten und erklären $\ln(t-\lambda)$ durch Vorgabe des Wertes in einem Punkt $t_1 \neq t_0$ auf C eindeutig. Bedeutet das Integral über C^* das Integral von t_0

über C bis t_0, so erhalten wir durch zweimalige partielle Integration

$$(38)\qquad \begin{cases} \tilde{f}_1(\lambda) = f(t_0) - \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C^*} f'(t)\ln(t-\lambda)\,dt \\ \qquad\quad = f(t_0) - f'(t_0)(t_0-\lambda) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C^*} f''(t)\{(t-\lambda)[\ln(t-\lambda)-1]\}\,dt. \end{cases}$$

Wir betrachten den Grenzwert von (38) für $\lambda \to t_1$. Der Durchschnitt $\mathfrak{M}$ einer genügend kleinen Umgebung von t_1 auf C^* mit $\mathfrak{C}$ ist ein Gebiet, für die $\lambda \in \mathfrak{M}$ können wir die Werte $\ln(t_1-\lambda)$ aus demselben Zweig nehmen, damit ist dann die Funktion $F(t,\lambda) = (t-\lambda)[\ln(t-\lambda)-1]$ in beiden Variablen gleichzeitig stetig auf $C^* \times \mathfrak{M}$ erklärt. Für $\lambda \in \mathfrak{M}$, $\lambda \to t_1$ erhalten wir für $t \neq t_0$ die stetige Grenzfunktion

$$F(t,t_1) = \begin{cases} (t-t_1)[\ln(t-t_1)-1] \\ 0 \text{ für } t = t_1. \end{cases}$$

Die Konvergenz $F(t,\lambda) \to F(t,t_1)$ mit $\lambda \to t_1$ in $\mathfrak{M}$ ist gleichmäßig in t, also ergibt (38)

$$(39)\qquad \lim_{\lambda \to t_1} \tilde{f}_1(\lambda) = f(t_0) - f'(t_0)(t_0-t_1) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} f''(t)\,F(t,t_1)\,dt = f_1(t_1).$$

Da $F(t,t_1)$ auf $C^* \times C^*$ in beiden Variablen gleichzeitig stetig ist, ist die Randfunktion $f_1(t_1)$ stetig und wird gleichmäßig angenommen (t_0 ist, da willkürlich wählbar, nur eine scheinbare Ausnahme).

Nun folgt aus $\tilde{f}_1^{(n)}(\lambda) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(t)\,dt}{(t-\lambda)^{n+1}}$ durch n-malige partielle Integration

$$(40)\qquad \tilde{f}_1^{(n)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f^{(n)}(t)\,dt}{t-\lambda}.$$

Anwendung unserer Überlegung von vorhin ergibt also, daß auch die n-te Ableitung von $\tilde{f}_1(\lambda)$ stetige Randwerte auf C hat.

Wir zeigen jetzt, daß die Randfunktion $f_1^{(n)}(t)$ von $\tilde{f}_1^{(n)}(\lambda)$ die Ableitung der Randfunktion $f_1^{(n-1)}(t)$ ist, dann haben wir bewiesen, daß die Randfunktion $f_1(t)$ von $\tilde{f}_1(\lambda)$ beliebig oft differenzierbar ist.

Es ist aber $\dfrac{f_1^{(n-1)}(t_0) - f_1^{(n-1)}(t)}{t_0 - t}$ beliebig genau durch einen Ausdruck

$$\frac{\tilde{f}_1^{(n-1)}(\lambda_0) - \tilde{f}_1^{(n-1)}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}\int_{\lambda}^{\lambda_0} \tilde{f}_1^{(n)}(\mu)\,d\mu, \qquad \lambda_0, \lambda \in \mathfrak{C},$$

approximierbar. Geht $t \to t_0$, so $\lambda, \lambda_0 \to t_0$ und das Integral rechts strebt gegen $f_1^{(n)}(t_0)$. Damit ergibt sich sofort

$$f_1[x] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n'} \tilde{f}_1(\lambda)\,\tilde{x}(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_C f_1(t)\,x(t)\,dt.$$

b) $\mathfrak{E}(\mathfrak{C})$ ist direkter stetiger Summand von $\mathfrak{E}(C)$. Dazu braucht nach einem bekannten Satz der Theorie der linearen Räume nur gezeigt zu werden,

daß die Abbildung $P_1 f(t) = f_1(t)$ von $\mathfrak{E}(C)$ in $\mathfrak{E}(\mathfrak{C})$ eine Projektion ist. Die Abbildung ist stetig, denn sind für eine Menge von Funktionen $f(t)$ aus $\mathfrak{E}(C)$ die $\sup_{t \in C} |f^{(n)}(t)|$ beschränkt, so folgt aus (39) und den entsprechenden Formeln für die Ableitungen von $f_1(t)$ auch die Beschränktheit der $\sup_{t \in C} f_1^{(n)}(t)$, das besagt nach (5) aber die Stetigkeit von P_1 bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}^{(1)}$. Ferner gilt $P_1^2 = P_1$, da bei der Bildung von $\tilde{f}_1(\lambda)$ aus einer Randfunktion $f(t) \in \mathfrak{E}(\mathfrak{C})$ eine in $\mathfrak{C}$ analytischen Funktion gerade diese analytische Funktion entsteht.

c) Für $\tilde{f}_2(\mu)$ kann man wie unter a) schließen, die Überlegung ist hier sogar einfacher; da μ außerhalb C liegt, ist $\ln(t-\mu)$ eindeutig auf ganz C erklärbar, man braucht nicht mehr aufzuschneiden und erhält statt (38)

$$(41) \qquad -\tilde{f}_1(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t-\mu} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f''(t)\{(t-\mu)[\ln(t-\mu)-1]\}\,dt,$$

die Grenzfunktion $F(t,\mu)$ ist auf $C \times \mathfrak{M}$ stetig.

Satz 15 gilt wörtlich auch für $E(\mathfrak{C})$ und $E(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$. Man beweist ihn so, daß man wie in Nr. 5 die konforme Abbildung $\lambda = \varphi(\xi)$ von $\overline{\mathfrak{R}}$ auf $\overline{\mathfrak{C}}$ benützt, durch die $E(\mathfrak{R})$ und $E(\mathfrak{C})$ topologisch isomorph aufeinander abgebildet werden.

Wie in Nr. 5 überträgt sich auch die Konvergenz der konzentrischen Näherungen gegen die Randfunktion (Satz 16), doch gilt die Monotonie nur bezüglich der ersten Norm $|||f(t)|||_1 = \sup_{t \in C} |f(t)|$.

10. *Der Zerlegungssatz für die Distributionen auf C.* Mit $D(\Omega - C)$ bezeichnen wir den Raum der den $u \in \mathfrak{E}'(C)$ zugeordneten lokalanalytischen Funktionen $\tilde{u}(\gamma) = (\tilde{u}_1(\lambda), \tilde{u}_2(\mu))$. Die $\tilde{u}_1(\lambda)$ bilden einen Raum $D(\mathfrak{C})$, die $\tilde{u}_2(\mu)$ entsprechend $D(\Omega - \mathfrak{C})$, die ihnen zugeordneten Räume von Randverteilungen auf C seien $\mathfrak{D}(\mathfrak{C})$ bzw. $\mathfrak{D}(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$. Der Zerlegungssatz für Distributionen auf C lautet nun

Satz 18. *Ist C eine analytische geschlossene Jordankurve, so gilt die direkte topologische Zerlegung*

$$(42) \qquad \mathfrak{E}'(C) = \mathfrak{D}(\mathfrak{C}) \oplus \mathfrak{D}(\Omega - \overline{\mathfrak{C}}).$$

Es ist $\mathfrak{D}(\mathfrak{C})$ der duale Raum zu $\mathfrak{E}(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$, $\mathfrak{D}(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ der duale Raum zu $\mathfrak{E}(\mathfrak{C})$.

Jede Distribution u auf C ist also eindeutig zerlegbar in zwei Distributionen, $u = u_1 + u_2$, wobei u_1 die Randverteilung einer in $\mathfrak{C}$ analytischen Funktion, u_2 die Randverteilung einer in $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$ analytischen und im ∞ verschwindenden Funktion ist.

Beweis. Der Zerlegung (37) entspricht nach einem allgemeinen Satz der Theorie der lokalkonvexen Räume eine topologisch direkte Zerlegung des dualen Raumes

$$(43) \qquad \mathfrak{E}'(C) = \mathfrak{E}_1 \oplus \mathfrak{E}_2,$$

wobei $\mathfrak{E}_1$ aus allen $u^{(1)} \in \mathfrak{E}'(C)$ mit $u^{(1)}[f_1] = 0$, $f_1 \in \mathfrak{E}(\mathfrak{C})$, besteht, entsprechend $\mathfrak{E}_2$ aus allen $u^{(2)}$ mit $u^{(2)}[f_2] = 0$, $f_2 \in \mathfrak{E}(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$; ferner ist $\mathfrak{E}_1$ topologisch isomorph dem dualen Raum zu $\mathfrak{E}(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$, $\mathfrak{E}_2$ entsprechend dem dualen Raum

zu $\mathfrak{E}(\mathfrak{C})$. Ist $u^{(1)} \in \mathfrak{E}_1$, so ist also $u^{(1)}\left[\frac{1}{t-\mu}\right] = 0$ für alle $\mu \in \Omega - \overline{\mathfrak{C}}$, d.h. es ist $\tilde{u}_2^{(1)}(\mu) \equiv 0$ in $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$, entsprechend ist $\tilde{u}_1^{(2)}(\lambda) \equiv 0$ in $\mathfrak{C}$. Die einer beliebigen Distribution $u = u^{(1)} + u^{(2)}$ zugeordnete Funktion $\tilde{u}_1(\lambda) \in D(\mathfrak{C})$ stimmt also mit $\tilde{u}_1^{(1)}(\lambda)$ überein, hat als Randverteilung also die Distribution $u^{(1)}$, d.h. $\mathfrak{D}(\mathfrak{C}) < \mathfrak{E}_1$. Da trivialerweise $\mathfrak{E}_1 < \mathfrak{D}(\mathfrak{C})$ gilt, haben wir $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{D}(\mathfrak{C})$, ebenso $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{D}(\Omega - \mathfrak{C})$.

Wir werden für Satz 18 noch einen direkten Beweis geben, der den Zerlegungssatz für $\mathfrak{E}(C)$ nicht benützt.

Wir untersuchen die den Distributionen zugeordneten lokalanalytischen Funktionen näher. Eine in $\mathfrak{C}$ analytische Funktion $\tilde{u}(\lambda)$ heiße *langsam wachsend in* $\mathfrak{C}$, wenn es ein $N > 0$ und eine natürliche Zahl k gibt, so daß

$$|\tilde{u}(\lambda)| \leq \frac{N}{\delta(\lambda)^k} \tag{44}$$

für alle $\lambda \in \mathfrak{C}$ gilt, dabei bedeutet $\delta(\lambda)$ den Abstand von λ vom Rand C von $\mathfrak{C}$. Enthält $\mathfrak{C}$ den Punkt ∞, so wird (44) nur für alle $\lambda \in \mathfrak{C} - U(\infty)$ verlangt, $U(\infty)$ eine beliebige, aber feste Umgebung von ∞. Es gilt nun

Satz 19. *Ist u eine Distribution auf C, so gilt für die zugeordnete Indikatrix $\tilde{u} = (\tilde{u}_1(\lambda), \tilde{u}_2(\mu))$, daß $\tilde{u}_1(\lambda)$ und $\tilde{u}_2(\mu)$ langsam wachsende Funktionen in $\mathfrak{C}$ bzw. $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$ sind. Umgekehrt erzeugt jedes Paar langsam wachsender (in ∞ verschwindender) Funktionen eine Distribution auf C.*

Beweis. a) Ist u eine Distribution, so ist u als stetige Linearfunktion auf $\mathfrak{C}(C)$ auf einer $\mathfrak{T}^{(l)}$-Umgebung von $\mathfrak{E}(C)$ beschränkt, es gibt also ein k und ein $M > 0$, so daß $|u[x]| \leq M \sup_{l \leq k} |x|_l$ ist für alle $x \in \mathfrak{E}(C)$, $|||x|||_l = \sup_{t \in C} |x^{(l)}(t)|$. Für $x(t) = \frac{1}{t-\lambda}$, $\lambda \in \mathfrak{C}$, ist $\left|\left|\left| \frac{1}{t-\lambda} \right|\right|\right|_l = \frac{l!}{\delta(\mu)^{l+1}}$, daraus folgt sofort $|\tilde{u}_1(\lambda)| \leq \frac{N_1}{\delta(\lambda)^{k+1}}$. Ebenso ergibt sich $|\tilde{u}_2(\mu)| \leq \frac{N_2}{\delta(\lambda)^{k+1}}$ für $\mu \in \Omega - (\overline{\mathfrak{C}} \cup U(\infty))$.

b) Es sei andererseits $\tilde{u}(\lambda)$ langsam wachsend in $\mathfrak{C}$, es gelte (44). Es sei $k > 1$. Bei geradliniger senkrechter Annäherung von einem genügend nahe am Rand gelegenen Punkt λ_0 an den Randpunkt t von $\mathfrak{C}$ gilt wegen (44) und $\lambda = \lambda_0 + r(t - \lambda_0)$, $0 < r < 1$, also $\delta(\lambda) = (1-r)\,|t - \lambda_0|$,

$$\left| \int_{\lambda_0}^{\lambda} \tilde{u}(\lambda)\, d\lambda \right| \leq \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{N}{\delta(\lambda)^k} |d\lambda| \leq \frac{Nk}{\delta(\lambda)^{k-1}}. \tag{45}$$

Legt man ein unbestimmtes Integral $\tilde{u}^{(-1)}(\lambda)$ von $\tilde{u}(\lambda)$ durch Wahl eines festen Ausgangspunktes a fest, so hat man von a bis zu einem λ_0 zu integrieren, alle diese $\int_a^{\lambda_0} \tilde{u}(\lambda)\, d\lambda$ bleiben aber unter einer festen Schranke, also folgt aus (45)

$$|\tilde{u}^{(-1)}(\lambda)| \leq \frac{N_1}{\delta(\lambda)^{k-1}} \qquad \text{für alle } \lambda \in \mathfrak{C}. \tag{46}$$

Fahren wir so fort, so erhalten wir $|\tilde{u}^{(-k+1)}(\lambda)| \leq \frac{N_{k-1}}{\delta(\lambda)}$, daraus

$$|\tilde{u}^{(-k)}(\lambda)| \leq N_k |\ln \delta(\lambda)|. \tag{47}$$

Aus (47) folgt schließlich, daß $\tilde{u}^{(-k-1)}(\lambda)$ stetige Randwerte auf C hat, denn es wird bei senkrechter Annäherung an den Randpunkt t

$$\left|\int_{\lambda}^{\lambda'} \tilde{u}^{(-k)}(\lambda)\, d\lambda\right| \leq -\int_{\lambda}^{\lambda'} N_k \ln \delta(\lambda)\, |d\lambda| < \varepsilon \tag{48}$$

für λ, λ' genügend nahe an t, also hat $\tilde{u}^{(-k-1)}(\lambda)$ einen Grenzwert bei Annäherung an den Rand. Da dieser Grenzwert offenbar gleichmäßig angestrebt wird, hat $\tilde{u}^{(-k-1)}(\lambda)$ eine stetige Grenzfunktion $u^{(-k-1)}(t)$ auf C. Es sei $M = \sup_{t \in C} |u^{(-k-1)}(t)|$.

Jetzt können wir zeigen, daß die durch $\tilde{u}(\lambda)$ erzeugte Linearfunktion

$$u[x] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n''} \tilde{u}(\lambda)\, \tilde{x}(\lambda)\, d\lambda, \qquad \tilde{x}(\lambda) \in R(\Omega - C),$$

auf $R(\Omega - C)$ im Sinne von $\mathfrak{T}^{(1)}$ stetig ist, sich also nach Satz 1 und 3 auf ganz $\mathfrak{E}(C)$ stetig fortsetzen läßt, also eine Distribution ist.

Ist nämlich $\|\tilde{x}(\lambda)\|_{k-1} = \sup_{t \in C} |x^{(k-1)}(t)| \leq K$, so ergibt sich durch partielle Integration

$$\left\{\begin{aligned} |u[x]| &= \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n''} \tilde{u}^{(-k-1)}(\lambda)\, \tilde{x}^{(k+1)}(\lambda)\, d\lambda\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{C} u^{(-k-1)}(t)\, x^{(k+1)}(t)\, dt\right| \leq \frac{MK|C|}{2\pi}. \end{aligned}\right. \tag{49}$$

c) Für $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$ hat man etwas anders vorzugehen: Das unbestimmte Integral einer in ∞ verschwindenden Funktion $\tilde{u}(\mu)$, $\mu \in \Omega - \overline{\mathfrak{C}}$, ist im allgemeinen keine eindeutige Funktion in $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$, wohl aber $\tilde{u}^{[-1]}(\mu) = \int_{\sim}^{\mu} \tilde{u}(\mu)\, d\mu$, die ebenfalls in ∞ verschwindet. Gilt (44) für $\tilde{u}(\mu)$, so beweist man wieder, daß $\tilde{u}^{[-k-1]}(\mu)$ eine stetige Randfunktion $u^{[-k-1]}(t)$ auf C besitzt und wir erhalten mit der Bezeichnung $\tilde{x}^{[1]}(\mu) = (\mu\, \tilde{x}(\mu))'$ durch Anwendung der Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n''} \tilde{u}(\mu)\, \tilde{x}(\mu)\, d\mu = \frac{-1}{2\pi i} \int_{C_n''} \tilde{u}^{[-1]}(\mu) x^{[1]}(\mu)\, d\mu$$

wie oben, daß $\tilde{u}$ eine Distribution erzeugt, denn auch die Menge aller $x(t) \in \mathfrak{E}(C)$ mit $\sup_{t \in C} |x^{[k+1]}(t)| \leq K$ bildet eine $\mathfrak{T}^{(1)}$-Umgebung in $\mathfrak{E}(C)$.

Satz 19 enthält unmittelbar die direkte Zerlegung (43) im algebraischen Sinn. Daß sie auch topologisch direkt ist, wird in Nr. 11 nochmals bewiesen werden.

Satz 19 und sein Beweis enthalten rein funktionentheoretische Charakterisierungen von $D(\mathfrak{C})$ und $D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$.

Satz 20. *$D(\mathfrak{C})$ besteht aus den langsam wachsenden Funktionen $\tilde{u}(\lambda)$ in $\mathfrak{C}$, die mit den Funktionen identisch sind, von denen ein geeignetes n-faches Integral $\tilde{u}^{(-n)}(\lambda)$ stetige Randwerte $u^{(-n)}(t)$ auf C besitzt.*

$D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ besteht aus den langsam wachsenden, in ∞ verschwindenden Funktionen in $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$, die mit den Funktionen $\tilde{u}(\mu)$ identisch sind, aus denen durch eine n-fache Operation der Form $\tilde{u}^{[-1]}(\mu) = \int_{\infty}^{\mu} \tilde{u}(\mu)\, d\mu$ eine Funktion mit stetigen Randwerten $u^{[-n]}(t)$ entsteht.

Die Bilinearform, die zu $D(\mathfrak{C})$ bzw. $D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ gehört, ist gegeben durch

$$\tilde{u}[\tilde{x}] = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_C u^{(-n)}(t)\, x^{(n)}(t)\, dt = u[x] \tag{50}$$

bzw.

$$\tilde{u}[\tilde{x}] = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_C u^{[-n]}(t)\, x^{[n]}(t)\, dt = u[x] \tag{50'}$$

für genügend großes n.

Zu beweisen sind nur noch (50) und (50'). (50) ergibt sich aus (49), das nur für auf C analytische x bewiesen war, sofort durch Grenzübergang von den analytischen x zu den auf C stetigen x. (50) und (50') entsprechen th. XXVI von [6], Bd. I.

Artet C in einen Punkt aus, so zeigt Satz 20, daß dann die Distributionen in Pole übergehen, die Distributionen auf C stehen also in einer gewissen Analogie zu den Polen, während die Randverteilungen, die nicht Distributionen sind, den wesentlichen isolierten Singularitäten entsprechen.

11. *Die Topologie der Distributionenräume.* Führen wir den Ausdruck

$$\left(\tilde{u}(\lambda)\right)_n = \sup_{\lambda \in \mathfrak{C}} |\tilde{u}^{(-n)}(\lambda)|, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{51}$$

ein und bezeichnen wir den Teilraum aller $\tilde{u}(\lambda) \in D(\mathfrak{C})$, für die $\tilde{u}^{(-n)}(\lambda)$ stetige Randwerte besitzt, mit $D_n(\mathfrak{C})$, so ist $D_n(\mathfrak{C})$ ein Banachraum bezüglich der Norm (51) (die Vollständigkeit folgt sofort aus dem Satz von WEIERSTRASS) und es ist $D(\mathfrak{C})$ die Vereinigungsmenge aller $D_n(\mathfrak{C})$. Wie in Nr. 1 können wir daher auf $D(\mathfrak{C})$ auch die Topologie $\mathfrak{T}^{(3)}$ der lokalkonvexen Hülle der $D_n(\mathfrak{C})$ einführen.

In $D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ haben wir analog

$$\left(\tilde{u}(\mu)\right)_n = \sup_{\mu \in \Omega - \overline{\mathfrak{C}}} |\tilde{u}^{[-n]}(\mu)|, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{51'}$$

einzuführen und erhalten damit wieder eine Topologie $\mathfrak{T}^{(3)}$.

$\mathfrak{T}^{(3)}$ ergibt sich sowohl in $D(\mathfrak{C})$ bzw. $D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$, wenn wir an Stelle von (51) und (51') die Normen

$$|\tilde{u}(\lambda)|_n = \sup_{\lambda \in \mathfrak{C}} |\tilde{u}(\lambda)\, \delta(\lambda)^n \quad \text{bzw.} = \sup_{\mu \in \Omega - (\overline{\mathfrak{C}} \cup U(\infty))} |\tilde{u}(\mu)\, \delta(\mu)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{52}$$

einführen.

Auf $D(\Omega - C)$ und damit auf $\mathfrak{E}'(C)$ erklären wir $\mathfrak{T}^{(3)}$ als die Topologie des topologischen Produkts von $D(\mathfrak{C})$ und $D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$.

Damit ist die Zerlegung (43) nach Definition eine direkte topologische Zerlegung bezüglich $\mathfrak{T}^{(3)}$. Satz 18 wird aus Satz 19 also folgen, wenn wir zeigen können, daß $\mathfrak{T}^{(3)}$ mit der durch $\mathfrak{E}(C)$ auf $\mathfrak{E}'(C)$ erzeugten starken Topologie übereinstimmt.

Dies besagt

Satz 21. *Die Topologie $\mathfrak{T}^{(3)}$ auf $\mathfrak{E}'(C)$ ist identisch mit der starken Topologie $\mathfrak{T}_b$.*

Beweis. a) $\mathfrak{T}^{(3)}$ ist feiner als $\mathfrak{T}_b$.

Die starken Nullumgebungen in $D(\mathfrak{C})$ sind die Durchschnitte $B^0 \cap D(\mathfrak{C})$, B^0 die polare Menge einer beschränkten Menge B aus $E(\Omega - C)$. Eine Menge $B \subset E(\Omega - C)$ ist aber beschränkt, wenn für jedes n ein $M_n < \infty$ existiert mit $\sup_{t \in B} |\tilde{x}^{(n)}(t)| \leq M_n$. Eine $\mathfrak{T}^{(3)}$-Nullumgebung U hat andererseits die Form $\bigcap_1^\infty U_n$, U_n die Menge aller $\tilde{u} \in D_n(\mathfrak{C})$ mit $|\tilde{u}|_n \leq K_n$. Wählt man $K_n \leq \frac{2\pi}{M_n C_1'}$, so wird wegen (50) $|\tilde{u}\,\tilde{x}| \leq 1$ für alle $\tilde{u} \in U$ und $\tilde{x} \in B$, also ist die durch die K_n bestimmte $\mathfrak{T}^{(3)}$-Umgebung U in B^0 enthalten, $\mathfrak{T}^{(3)}$ ist feiner als $\mathfrak{T}_b$.

Für $D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ hat man entsprechend (50′) und (51′) zu benützen.

b) $\mathfrak{T}_b$ ist feiner als $\mathfrak{T}^{(3)}$.

Nach dem Satz von Mackey-Arens (zitiert in [1], S. 64) ist die starke Topologie auf $\mathfrak{E}'(C)$ die feinste lokalkonvexe Topologie auf $\mathfrak{E}'(C)$ mit $\mathfrak{E}(C)$ als dualem Raum. Zeigen wir also, daß jede $\mathfrak{T}^{(3)}$-stetige Linearfunktion $x[u]$ auf $\mathfrak{E}'(C)$ durch ein $x \in \mathfrak{E}(C)$ erzeugt wird, so ist $\mathfrak{T}_b$ feiner als $\mathfrak{T}^{(3)}$.

Nun ist $\mathfrak{T}^{(3)}$ auf $\mathfrak{N}(C)$ schwächer als $\mathfrak{T}^{(0)}$, $x[u]$ ist also $\mathfrak{T}^{(0)}$-stetig, wird daher durch ein $\tilde{x}(v) \in P(\Omega - C)$ erzeugt.

Es gibt eine $\mathfrak{T}^{(3)}$-Umgebung $U = \bigcap_1^\infty U_n$ mit $|x[u]| \leq 1$ für alle $u \in U$. Es sei etwa wieder U_n die Menge aller $\tilde{u} \in D(\mathfrak{C})$ mit $|\tilde{u}|_n \leq K_n$. In $U \cap R(\mathfrak{C})$ liegen dann alle $\tilde{u} = \frac{K_n}{(\lambda - \mu_0)^n}$, $\mu_0 \in \Omega - \overline{\mathfrak{C}}$, denn wegen $|\lambda - \mu_0| \geq \delta(\lambda)$ ist $\left|\frac{1}{(\lambda - \mu_0)^n}\right|_n \leq 1$. Nach Nr. 4 ist dann aber

$$|x[\tilde{u}]| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n''} \frac{K_n \tilde{x}_2(\mu)\, d\mu}{(\mu - \mu_0)^n}\right| = \frac{K_n}{(n-1)!} |\tilde{x}_2^{(n-1)}(\mu_0)| \leq 1,$$

d.h. alle Ableitungen von $\tilde{x}_2(\mu)$ sind beschränkt in $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$, die Randverteilung $x_2(t)$ liegt in $\mathfrak{E}(C)$. Ebenso schließt man für $\tilde{x}_1(\mu)$, also liegt $x = x_1 + x_2$ in $\mathfrak{E}(C)$.

Damit ist für die starke Topologie auf $\mathfrak{E}'(C)$ eine Definition gefunden, die nur die funktionentheoretischen Eigenschaften der die Distributionen darstellenden lokalanalytischen Funktionen benützt.

Satz 22. *Alle $D(\mathfrak{C})$, ebenso alle $D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ mit analytischem Rand C sind bei geeigneter konformer Abbildung der Definitionsgebiete aufeinander topologisch isomorph.*

Beweis. Bildet $\lambda = \varphi(\xi)$ $\overline{\mathfrak{K}}$ auf $\overline{\mathfrak{C}}$ ab, so multiplizieren sich die Entfernungen in $\overline{\mathfrak{C}}$ höchstens mit $M = \sup_{|\xi|<1} |\varphi'(\xi)|$, also gilt für die Entfernungen vom Rande $\delta_C(\varphi(\xi)) \leq M\, \delta_K(\xi)$. Ist nun $\tilde{v}(\xi) = \tilde{u}(\varphi(\xi))$ die $\tilde{u}(\lambda)$ entsprechende Funktion, so folgt aus $[\tilde{v}(\xi)]_n \leq N$ offenbar $[\tilde{u}(\lambda)]_n \leq M^n N$. Ist daher eine $\mathfrak{T}^{(3)}$-Nullumgebung V in $D(\mathfrak{C})$ vorgegeben, so gibt es also eine $\mathfrak{T}^{(3)}$-Nullumgebung V' in $D(\mathfrak{K})$, deren Bild in V liegt, die Abbildung ist stetig in der einen Richtung, ebenso natürlich in der anderen.

Dieselbe Überlegung gilt für Abbildungen von $\Omega - \mathfrak{K}$ auf $\Omega - \mathfrak{C}$, die ∞ festlassen. Auch $D(\mathfrak{K})$ und $D(\Omega - \overline{\mathfrak{K}})$ sind topologisch isomorph, jedoch nicht bei konformer Abbildung, sondern bei der Zuordnung $\tilde{x}(\xi) \to \frac{1}{\xi}\, \tilde{x}\left(\frac{1}{\xi}\right)$. Dies folgt auch aus dem folgenden Satz, in dem wir die Topologie $\mathfrak{T}^{(3)}$ auf den $D(\mathfrak{K})$ und $D(\Omega - \overline{\mathfrak{K}})$ entsprechenden vollkommenen Räumen deuten,

Satz 23. *$D(\mathfrak{K})$ und $D(\Omega - \overline{\mathfrak{K}})$ entsprechen topologisch isomorph die Räume ε_1^* bzw. ε_2^* aller $u_1 = (v_0, v_1, \ldots)$ bzw. $v_2 = (\ldots, v_{-2}, v_{-1})$, die (25) erfüllen. ε_1^* ist die lokalkonvexe Hülle der Banachräume ε_{1k}^*, $k = 1, 2, \ldots$, aller u_1 mit*

$$||u_1||_k = \sup_n \frac{|v_n|}{n^k} < \infty. \tag{53}$$

Entsprechendes gilt für ε_2^*.

Beweis. Für alle u_1 mit $||u_1||_k \leq M$ ergibt sich durch gliedweise Integration für die entsprechenden Funktionen $\tilde{u}_1(\lambda) = \sum_0^\infty v_n \lambda^n$, daß $(\tilde{u}_1)_{k+2} \leq M'$ ist. Gilt umgekehrt $(\tilde{u}_1(\lambda))_k \leq M$, so ergibt sich daraus für $\lambda = r e^{i\varphi}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{u}^{(-k)}(\lambda)|^2\, d\varphi = \sum_0^\infty \frac{|v_n|^2 r^{2(n+k)}}{[(n+1)(n+2)\ldots(n+k)]^2} \leq M^2$$

für alle $0 < r < 1$. Daraus folgt $|v_n| \leq M'' n^k$, also $||u_1||_k \leq M''$. Durch die Normen (53) wird daher auf ε_1^* wieder die Topologie $\mathfrak{T}^{(3)}$ erzeugt. Für ε_2^* hat man analog vorzugehen.

Wie sieht die Konvergenz in $D(\mathfrak{C})$ und $D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ aus? In den Stufenräumen ε_1^* und ε_2^* ist nach [4] eine Folge $u^{(n)}$ dann und nur dann stark (also $\mathfrak{T}^{(3)}$) konvergent, wenn alle ihre Glieder in einem ε_{1k}^* bzw. ε_{2k}^* liegen und die Folge im Sinn der Metrik eines dieser Räume konvergiert. Nach den Sätzen 22 und 23 gilt also allgemein

Satz 24. *In $D(\mathfrak{C})$ und $D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ ist eine Folge von Distributionen $u^{(n)}$ dann und nur dann konvergent, wenn die ihr entsprechende Folge von langsam wachsenden Funktionen $\tilde{u}^{(n)}$ im Sinne einer der Normen (52) konvergiert.*

Mit der Bestimmung des Konvergenzbegriffs in $\mathfrak{E}'(C)$ können wir jetzt auch den Approximationssatz formulieren,

Satz 25. *Die konzentrischen Näherungen u_r einer Distribution u auf der analytischen Kurve C konvergieren im Sinne einer der Normen (52) gegen u.*

Es genügt, dies für ein $u \in \mathfrak{D}(\mathfrak{S})$, also $\tilde{u}(\lambda) \in D(\mathfrak{S})$ zu zeigen. Ist aber $|u(\lambda)\,\delta(\lambda)^n| \leqq M$, so konvergieren die $\tilde{u}_r(\lambda) = \tilde{u}\left(\varphi(r\,\psi(\lambda))\right)$ offenbar im Sinn der $(n+1)$-ten Normen (52) gegen $\tilde{u}(\lambda)$.

Literatur.

[1] Dieudonné, J., et L. Schwartz: La dualité dans les espaces (F) et (LF). Ann. Inst. Fourier **1**, 61—101 (1949). — [2] Dias, C · Espaços vectoriais topológicos e sua aplicação nos espaços funcionais anal ticos. São Paulo 1951. — [3] Grothendieck, A.: Sur certains espaces de fonctions holomorphes. Erscheint im J. reine angew. Math. — [4] Köthe, G.: Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume. Math. Z. **51**, 317—345 (1948). — [5] Köthe, G.: Dualität in der Funktionentheorie. Erscheint im J. reine angew. Math. — [6] Schwartz, L.: Théorie des distributions. I., II. Actual. sci. industr. **1091**, **1122** (1950/1). - [7] Silva, J. S. e: As funções analíticas e a análise funcional. Port. Math. **9**, 1—130 (1950). — [8] Taylor, A. E.: On certain Banach spaces whose elements are analytic functions. Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima **12**, 31—43 (1949). — [9] Toeplitz, O.: Die linearen vollkommenen Räume der Funktionentheorie. Comm. math. Helvetici **23**, 222—242 (1949).

Mainz, Universität, Mathematisches Institut.

(Eingegangen am 16. Mai 1952.)

HAACKE, W.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 34—45 (1952)

Über die Stabilität eines Systems von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, die von Parametern abhängen. II.

Von

WOLFHART HAACKE.

1. Einleitung.

Im ersten Teil dieser Arbeit [3] wurde eine allgemeine Theorie der Stabilität der Lösungen von linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten zusammengestellt. Damit konnte dann die Stabilität der Lösungen des Systems

$$\mathfrak{y}'' + \lambda^2 \mathfrak{R}(x)\, \mathfrak{y} + \lambda\, \mathfrak{A}(x, \lambda)\, \mathfrak{y} = 0$$

für große Werte des reellen Parameters λ untersucht werden. Dabei ist $\mathfrak{R}(x)$ eine Diagonalmatrix und $\mathfrak{A} \sim \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^\alpha} \mathfrak{A}_\alpha(x)$. In dem vorliegenden Teil wollen wir nun ein System

$$r^2 \mathfrak{K}\, \mathfrak{v}'' + \mathfrak{L}\, \mathfrak{v} + \varepsilon\, \mathfrak{P}(x, \varepsilon)\, \mathfrak{v} = 0 \tag{1}$$

betrachten. $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ seien konstante Matrizen, r und ε positive reelle Parameter. Die Matrix $\mathfrak{P}(x, \varepsilon)$ lasse sich durch eine für $\varepsilon \leqq E_0$ absolut konvergente Matrizenreihe $\sum_{\alpha=0}^{\infty} \varepsilon^\alpha \mathfrak{P}_\alpha(x)$ darstellen. Mit Hilfe eines Satzes von Herrn PERRON wird zunächst gezeigt, daß ein formaler Potenzreihenansatz in ε in einem endlichen Intervall $0 \leqq \varepsilon < E$ absolut konvergiert. In [3] ergab sich, daß wir an einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten aus festen Funktionswerten von n speziellen Lösungsspalten gebildet sind, das Stabilitätsverhalten von (1) ablesen können. In unserem Fall lassen sich die Koeffizienten dieser algebraischen Gleichung in absolut konvergente Reihen nach dem Parameter entwickeln. So gelingt es uns, in einem Rechteck der r, ε-Ebene $0 \leqq \varepsilon < E$, $0 < R_1 \leqq r \leqq R_2 < \infty$ Bereiche festzulegen, deren Parameterwerte stabile bzw. instabile Lösungen von (1) zur Folge haben.

Zum Teil angeregt wurde diese Untersuchung durch eine Arbeit von Herrn METTLER [4], in der ein System (1) bei $\mathfrak{P}_\alpha = 0$ für $\alpha > 0$ und $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{B} \cos x$ mit konstanter Matrix $\mathfrak{B}$ formal behandelt wurde. In jener Arbeit spricht Herr METTLER selbst den Wunsch aus, daß seine Untersuchungen mathematisch weitergeführt werden mögen. Dieses spezielle System hat auch sonst für die Praxis Bedeutung, wie unter anderen auch die Arbeiten [2], [4], [6],

zeigen. Wir befassen uns mit diesem Spezialfall nur in einer kurzen Schlußbemerkung, da an anderer Stelle ausführlicher darauf eingegangen werden soll.

Im Zusammenhang mit unserer Untersuchung steht eine Arbeit von Herrn CESARI [1], bei der $r=1$, $\mathfrak{R}=\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{P}_\alpha=0$ für $\alpha>0$ ist. Für diesen Fall wird unter bestimmten Voraussetzungen gezeigt, daß für hinreichend kleine ε die Lösungen stabil sind. Herr CESARI verwendet andere Beweismethoden als der Verfasser.

2. Konvergenzbeweis eines formalen Lösungsansatzes.

Wir betrachten ein ein Vektorform gegebenes System von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$r^2\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{v}''+\mathfrak{Q}\,\mathfrak{v}+\varepsilon\,\mathfrak{P}(x,\varepsilon)\,\mathfrak{v}=0. \tag{1}$$

Dabei seien $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Q}$ konstante HERMITEsche Matrizen vom Typ (n,n), außerdem habe $\mathfrak{R}$ nur positive Eigenwerte. r und ε seien positive reelle Parameter, definiert in den Intervallen $0\leq\varepsilon\leq E_0$ und $0<R_1\leq r\leq R_2<+\infty$. Weiter sei $\mathfrak{P}(x,\varepsilon)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\varepsilon^\alpha\,\mathfrak{P}_\alpha(x)$ für $\varepsilon\leq E_0$ eine für alle x absolut konvergente Matrizenreihe. Die Matrizenfunktionen $\mathfrak{P}_\alpha(x)$ seien stetige gerade Funktionen der reellen Veränderlichen x vom Typ (n,n) mit der Periode 2π[1]).

Wir fragen nach den Bedingungen, wann für ein Parameterpaar r, ε $2n$ linear unabhängige Lösungsspalten beschränkte Funktionen von x sind. Wir werden uns im folgenden mehrfach auf die im Abschnitt 2 von [3] zusammengestellte allgemeine Theorie der Systeme zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten beziehen.

Durch eine konstante unitäre Transformation $\mathfrak{v}=\mathfrak{T}\,\mathfrak{y}$ ergibt sich aus (1) das System

$$y_k''+q_k^2\,y_k+\varepsilon\sum_{m=1}^{n}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\varepsilon^\alpha\,a_{k\,m\,\alpha}(x,r)\,y_m=0\quad(k=1\ldots n), \tag{2}$$

wenn man die unitäre Matrix $\mathfrak{T}$ so wählt, daß $\tilde{\mathfrak{T}}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{T}$ die Einheitsmatrix und gleichzeitig $\tilde{\mathfrak{T}}\,\mathfrak{Q}\,\mathfrak{T}$ eine Diagonalmatrix mit den Elementen r_k^2 ergibt. Weiter setzen wir dabei

$$q_k=\frac{r_k}{r},\qquad a_{k\,m\,\alpha}(x,r)=\frac{1}{r^2}\,p_{k\,m\,\alpha}(x). \tag{3}$$

Die $p_{k\,m\,\alpha}(x)$ sind die Elemente der Matrix $\tilde{\mathfrak{T}}\,\mathfrak{P}_\alpha(x)\,\mathfrak{T}$. Da die r_k^2 reell sind (verallg. Hauptachsentransformation), können wir

$$\arg r_k=\arg q_k=0\quad\text{für } r_k^2>0$$

und

$$\arg r_k=\arg q_k=\frac{\pi}{2}\quad\text{für } r_k^2<0$$

[1]) Läßt man allgemeine Funktionen mit der Periode 2π zu, so wird die Stabilitätsgleichung (19) erheblich umständlicher, im Prinzip bleiben aber alle weiteren Untersuchungen gültig. Siehe dazu [3].

setzen. Die Reihen $\sum_{\alpha=0}^{\infty} a_{k\,m\,\alpha}(x, r)\,\varepsilon^{\alpha}$ sind ebenfalls bei $\varepsilon \leqq E_0$ für alle x und alle zulässigen r absolut konvergent. Die $a_{k\,m\,\alpha}(x, r)$ sind stetige gerade Funktionen von x mit der Periode 2π.

Wir transformieren jetzt (2) in ein System erster Ordnung [3], wobei wir zunächst $q_k = 0$ ausschließen:

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} y_k = z_k + z_{k+n}, \\ y_k' = i\,q_k(z_k - z_{k+n}). \end{cases}$$

Dann ist

$$y_k' = i\,q_k(z_k - z_{k+n}) = z_k' + z_{k+n}',$$

$$y_k'' = i\,q_k(z_k' - z_{k+n}') = -q_k^2(z_k + z_{k+n}) - \varepsilon \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \varepsilon^{\alpha} a_{k\,m\,\alpha}(z_m + z_{m+n})$$

oder

$$z_k' + z_{k+n}' = i\,q_k(z_k - z_{k+n}),$$

$$z_k' - z_{k+n}' = i\,q_k(z_k + z_{k+n}) + \frac{i\,\varepsilon}{q_k} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \varepsilon^{\alpha} a_{k\,m\,\alpha}(z_m + z_{m+n}).$$

Diese $2n$ Gleichungen lösen wir nach den Ableitungen auf:

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} z_k' = i\,q_k z_k + \dfrac{i\,\varepsilon}{2q_k} \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \varepsilon^{\alpha} a_{k\,m\,\alpha}(z_m + z_{m+n}), \\ z_{k+n}' = -i\,q_k z_{k+n} - \dfrac{i\,\varepsilon}{2q_k} \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \varepsilon^{\alpha} a_{k\,m\,\alpha}(z_m + z_{m+n}). \end{cases}$$

Herr PERRON hat folgenden Satz bewiesen [5]:
Wenn in dem System von Differentialgleichungen

$$\frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_{2n}} f_{\varkappa \nu_0 \nu_1 \dots \nu_{2n}}(x)\,\varepsilon^{\nu_0} z_1^{\nu_1} \dots z_{2n}^{\nu_{2n}}$$

bei $\varkappa = 1 \dots 2n$ *und* $\sum_{\gamma=0}^{2n} \nu_\gamma \geqq 1$ *die Koeffizienten* $f_{\varkappa \nu_0 \nu_1 \dots \nu_{2n}}(x)$ *im Intervall* $0 \leqq x \leqq a$ *stetig sind und den Ungleichungen*

$$\text{(6)} \qquad |f_{\varkappa \nu_0 \dots \nu_{2n}}(x)| \leqq \frac{(\nu_0 + \dots + \nu_{2n})!}{\nu_0! \dots \nu_{2n}!} \frac{M s_\varkappa}{s_0^{\nu_0} \dots s_{2n}^{\nu_{2n}}}$$

genügen, so läßt sich das Integral, welches für $x = 0$ *die Anfangswerte* $z_\varkappa(0) = b_\varkappa$ *annimmt, nach Potenzen von* ε, $b_1, \dots, b_{2n}$ *bei* $\sum_{\gamma=0}^{2n} \mu_\gamma \geqq 1$ *entwickeln:*

$$\text{(7)} \qquad z_\varkappa = \sum_{\mu_0 \dots \mu_{2n}} \varphi_{\varkappa \mu_0 \dots \mu_{2n}}(x)\,\varepsilon^{\mu_0} b_1^{\mu_1} \dots b_{2n}^{\mu_{2n}}.$$

Diese Reihen sind im Bereich

$$\frac{\varepsilon}{s_0} + \frac{|b_1|}{s_1} + \dots + \frac{|b_{2n}|}{s_{2n}} < \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{\varrho^{\varrho-1}}{\varrho!} e^{-\varrho(2nMa+1)}$$

absolut konvergent.

Bei Anwendung dieses Satzes müssen wir beachten, daß unsere Koeffizienten noch von r abhängen. Wir müssen also (6) gleichmäßig für alle r im zulässigen Intervall erfüllen. Für unser (lineares) System ist $\sum_{\gamma=1}^{2n} \nu_\gamma = 1$. Wir setzen $a = 2\pi$ und $M \geqq \max |q_k|$. Durch diese Beschränkung für M ist (6) für $\nu_0 = 0$ sicher bei unserem System (5) erfüllt. Für $\nu_0 = \alpha > 0$ lautet (6), wenn wir $s_1 = \cdots = s_{2n} = s$ setzen:

$$\left| \frac{a_{k,m,\alpha-1}}{2q_k} \right| \leq (\alpha+1)\frac{M}{s_0^\alpha}. \tag{8}$$

Da $\lim_{\alpha\to\infty} a_{k\,m\,\alpha} = 0$ für alle x gilt, ist (8) sicher für hinreichend große α erfüllt, wenn wir $0 < s_0 \leqq 1$ wählen. Durch Wahl eines solchen s_0 und eventuelle Vergrößerung von M ist (8) für alle α zu erfüllen. M ist dabei von r abhängig: $M = c/r$, während s_0 unabhängig von r gewählt werden kann. Da die Konvergenz der Lösung gleichmäßig in r gelten soll, setzen wir $M = c/R_1$. Die Voraussetzungen des Satzes von Herrn Perron sind also für unser System (5) zu erfüllen.

Verschwindet aber mindestens eines der q_m, so setzen wir $y_k = z_k$ und $y_k' = z_{k+n}$, womit sich aus (2)

$$z_{k+n}' + q_k^2 z_k + \varepsilon \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \varepsilon^\alpha a_{k\,m\,\alpha}(x,r) z_m = 0,$$
$$z_k' - z_{k+n} = 0$$

ergibt. Jetzt muß $M \geqq \max(1, |q_k|^2)$ gewählt werden. Weiter ist die Ungleichung $|a_{k,m,\alpha-1}| \leqq (\alpha+1)\frac{M}{s_0^\alpha}$ zu erfüllen. Auch für diesen Fall gilt also der Satz von Herrn Perron.

Wir betrachten nun $2n$ Lösungsspalten von (5). Die λ-te Lösungsspalte erfülle die Anfangsbedingungen

$$z_{\varkappa\lambda}(0) = \delta_{\varkappa\lambda} \qquad (\varkappa = 1 \ldots 2n). \tag{9}$$

Die Lösung (7) kann man nach Potenzen von ε zusammenfassen, da die Reihen absolut konvergieren. Also ist

$$z_{\varkappa\lambda} = \sum_{\beta=0}^{\infty} \varphi_{\varkappa\lambda\beta}(x,r)\,\varepsilon^\beta. \tag{10}$$

Aus (9) ergibt sich

$$\begin{cases} \varphi_{\varkappa\lambda\beta}(0) = 0 \quad \text{für } \beta \geqq 1 \text{ und} \\ \varphi_{\varkappa\lambda 0}(0) = \delta_{\varkappa\lambda}. \end{cases} \tag{11}$$

(10) ist nach dem Satz von Herrn Perron absolut konvergent für

$$\varepsilon < s_0 \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{\varrho^{\varrho-1}}{\varrho!}\, e^{-\varrho(4\pi n M+1)} = \frac{s_0}{s}.$$

Da

$$\sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{\varrho^{\varrho-1}}{\varrho!} e^{-\varrho} = 1$$

ist [5], ist sicher die Minorante

$$\sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{\varrho^{\varrho-1}}{\varrho!} e^{-\varrho(4\pi n M+1)}$$

für alle zulässigen r absolut konvergent. Da wir über die Größe s noch verfügen können, ist (10) für $\varepsilon < E$ bei

$$s_0 \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{\varrho^{\varrho-1}}{\varrho!} e^{-\varrho(4\pi n M+1)} = E \,(> s_0 e^{-(4\pi n M+1)})$$

absolut konvergent. Die Konvergenz gilt gleichmäßig für alle x und alle zulässigen r.

Unter Berücksichtigung von (4) und (10) ergibt sich

$$(12) \qquad \begin{cases} y_{k\lambda} = \sum_{\beta=0}^{\infty} \left[\varphi_{k\lambda\beta}(x,r) + \varphi_{k+n,\lambda,\beta}(x,r)\right] \varepsilon^{\beta}, \\ y'_{k\lambda} = i\, q_k \sum_{\beta=0}^{\infty} \left[\varphi_{k\lambda\beta}(x,r) - \varphi_{k+n,\lambda,\beta}(x,r)\right] \varepsilon^{\beta}. \end{cases}$$

Wegen (9) ist

$$(13) \qquad \begin{cases} y_{k\lambda}(0) = \delta_{k\lambda} + \delta_{k+n,\lambda}, \\ y'_{k\lambda}(0) = i\, q_k \,(\delta_{k\lambda} - \delta_{k+n,\lambda}). \end{cases}$$

Das Lösungssystem (12) soll nun in ein System transformiert werden, das den Anfangsbedingungen

$$(14) \qquad \begin{cases} u_{k\lambda}(0) = \delta_{k\lambda}, \\ u'_{k\lambda}(0) = \delta_{k+n,\lambda} \end{cases}$$

genügt. Es gilt also eine Beziehung

$$(15) \qquad \begin{cases} u_{k\lambda}(x) = \sum_{\varkappa=1}^{2n} y_{k\varkappa}(x)\, g_{\varkappa\lambda} \\ u'_{k\lambda}(x) = \sum_{\varkappa=1}^{2n} y'_{k\varkappa}(x)\, g_{\varkappa\lambda} \end{cases}$$

mit konstanten $g_{\varkappa\lambda}$. Setzen wir in (15) $x = 0$ und benutzen (13) und (14), so ergeben sich Gleichungssysteme mit nichtverschwindender Determinante für die $4n^2$ Unbekannten $g_{\varkappa\lambda}$ [2]).

(10) ergibt sich durch formales Einsetzen eines Potenzreihenansatzes in (5) mit von x und r abhängigen unbestimmten Koeffizienten bei Beachtung von (9) bzw. (11). Wegen (4) ist dann (12) die Lösung des Systems (2), die sich durch formalen Potenzreihenansatz in ε mit den Anfangsbedingungen (13)

[2]) Auf die analoge Überlegung für $r_k = 0$ soll verzichtet werden.

ergibt. (10) und (12) sind für $\varepsilon < E$ absolut konvergent. Aus (15) ergeben sich ebenfalls Reihen in ε, die für dieselben ε absolut konvergieren und auch formal (2) befriedigen, außerdem auch (14) erfüllen. Machen wir also einen formalen Potenzreihenansatz in ε und befriedigen damit (2) und (14), so erhalten wir demnach $2n^2$ für alle x und alle zulässigen r bei $\varepsilon < E$ absolut konvergente Reihen.

Wir erhalten damit folgenden Satz:

Ein formaler Ansatz

$$u_{k\lambda} = \sum_{\beta=0}^{\infty} \omega_{k\lambda\beta}(x, r)\, \varepsilon^{\beta} \tag{16}$$

mit den Anfangsbedingungen (14) *in* (2) *eingesetzt ergibt für*

$$\varepsilon < E = s_0 \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{\varrho^{\varrho-1}}{\varrho!}\, e^{-\varrho(4\pi n M+1)}$$

in ε absolut konvergente Reihen, wobei x beliebige reelle und r reelle zulässige Werte annehmen darf. s_0 und M sind geeignet zu wählende Konstante.

3. Bestimmung der ersten Glieder der Lösungsreihen.

Wir wollen jetzt die Glieder der Reihen (16) bestimmen. Setzen wir (16) in (2) ein, so erhalten wir folgendes Rekursionssystem:

$$\begin{cases} \omega''_{k\lambda\beta} + q_k^2 \omega_{k\lambda\beta} + \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=0}^{\beta-1} a_{km\gamma}\, \omega_{m,\lambda,\beta-1-\gamma} = 0 \\ \qquad\qquad (k, \lambda = 1 \ldots n, \beta = 0, 1, \ldots)\ ^{3}). \end{cases} \tag{17}$$

Zunächst setzen wir $r_k \neq 0$ $(k = 1 \ldots n)$ voraus. Dieser Sonderfall wird am Schluß des Abschnitts behandelt. Wegen (14) ist

$$\omega_{k\lambda 0} = \delta_{k\lambda} \cos q_k x. \tag{18}_0$$

Für $\beta = 1$ ergibt sich aus (17)

$$\omega''_{k\lambda 1} + q_k^2 \omega_{k\lambda 1} = -\sum_{m=1}^{n} a_{km0}\, \delta_{m\lambda} \cos q_m x = -a_{k\lambda 0} \cos q_\lambda x.$$

Wegen $\omega_{k\lambda 1}(0) = \omega'_{k\lambda 1}(0) = 0$ ist

$$\omega_{k\lambda 1} = \frac{1}{q_k} \int_0^x a_{k\lambda 0}(\xi) \cos q_\lambda \xi \sin q_k(\xi - x)\, d\xi. \tag{18}_1$$

Für $\beta = 2$ folgt

$$\omega''_{k\lambda 2} + q_k^2 \omega_{k\lambda 2} = -a_{k\lambda 1} \cos q_\lambda x - \sum_{m=1}^{n} \frac{a_{km0}(x)}{q_m} \int_0^x a_{m\lambda 0}(\xi) \cos q_\lambda \xi \sin q_m(\xi - x)\, d\xi.$$

[3]) Für $\beta = 0$ entfällt die Summe. λ läuft nur bis n, da zur Stabilitätsuntersuchung nur die ersten n Lösungsspalten benötigt werden.

Also ist

$$(18)_2 \quad \begin{cases} \omega_{k\lambda 2} = \dfrac{1}{q_k} \displaystyle\int_0^x a_{k\lambda 1}(\xi) \cos q_\lambda \xi \sin q_k(\xi - x)\, d\xi + \\ + \dfrac{1}{q_k} \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \dfrac{1}{q_m} \int_0^x a_{k m 0}(\xi) \sin q_k(\xi - x) \left\{ \int_0^\xi a_{m\lambda 0}(\eta) \cos q_\lambda \eta \sin q_m(\eta - \xi)\, d\eta \right\} d\xi . \end{cases}$$

Analog lassen sich die weiteren Glieder bestimmen. Wir wollen die explizite Berechnung hier abbrechen.

Jetzt tragen wir den Fall $r_k = 0$ nach. Statt (17) gilt jetzt

$$\omega''_{k\lambda\beta} = -\sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=0}^{\beta-1} a_{k m \gamma} \omega_{m,\lambda,\beta-1-\gamma} \qquad \text{für } k = 1 \ldots h,$$

denn durch Umnumerierung läßt sich immer erreichen, daß $r_1 = \cdots = r_h = 0$ und $r_{h+1} \neq 0, \ldots, r_n \neq 0$ sind. Dabei ist $1 \leq h \leq n$. Damit erhalten wir

$$\omega_{k\lambda 0} = \delta_{k\lambda} \qquad (k \leq h),$$

$$\omega_{k\lambda 0} = \delta_{k\lambda} \cos q_k x \qquad (k > h),$$

$$\omega_{k\lambda 1} = \int_0^x a_{k\lambda 0}(\xi) \cdot (\xi - x)\, d\xi \qquad (k, \lambda \leq h),$$

$$\omega_{k\lambda 1} = \int_0^x a_{k\lambda 0}(\xi) \cos q_\lambda \xi \cdot (\xi - x)\, d\xi \qquad (k \leq h,\ \lambda > h),$$

$$\omega_{k\lambda 1} = \frac{1}{q_k} \int_0^x a_{k\lambda 0}(\xi) \sin q_k(\xi - x)\, d\xi \qquad (k > h,\ \lambda \leq h),$$

$$\omega_{k\lambda 1} = \frac{1}{q_k} \int_0^x a_{k\lambda 0}(\xi) \cos q_\lambda \xi \sin q_k(\xi - x)\, d\xi \qquad (k, \lambda > h).$$

Auf die analoge Bestimmung der $\omega_{k\lambda 2}$ wollen wir verzichten.

4. Die Stabilitätsgleichung.

Setzen wir

$$u_{k\lambda}(2\pi) = U_{k\lambda},$$

$$\omega_{k\lambda\beta}(2\pi) = \Omega_{k\lambda\beta},$$

so lautet die Stabilitätsgleichung nach Abschnitt 2 von [3]

$$(19) \qquad \begin{vmatrix} U_{11} - \cos 2\pi\tau & U_{12} & \cdots & U_{1n} \\ U_{21} & U_{22} - \cos 2\pi\tau & \cdots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{n1} & U_{n2} & \cdots & U_{nn} - \cos 2\pi\tau \end{vmatrix} = 0,$$

wobei τ der charakteristische Exponent bei $\sigma = e^{2\pi i \tau}$ ist. Das System (2) soll stabil heißen, wenn *alle* Lösungen von (2) beschränkte Funktionen von x sind. Das ist aber dann der Fall, wenn alle Wurzeln $\cos 2\pi\tau$ des Polynoms n-ten Grades (19) reell, verschieden und dem Betrage nach kleiner Eins sind. Ergeben sich neben Wurzeln mit den genannten Eigenschaften mehrfache reelle Wurzeln vom Betrage kleiner oder gleich Eins oder Wurzeln $\cos 2\pi\tau = \pm 1$, so sind die Lösungen von (2) nur bei speziellen Anfangsbedingungen oder bei Einfachheit aller Elementarteiler der Gl. (5) in [3] beschränkt. Solch ein System heiße labil. Jedes andere System werde instabil genannt.

Für die spezielle Diskussion von (19) wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß *alle* $p_{k\lambda\beta}$ *reell* sind. Dann sind auch alle Koeffizienten von (19) reell.

(19) ist ein Polynom n-ten Grades in $\cos 2\pi\tau$, dessen Koeffizienten Potenzreihen in ε sind: $P(\cos 2\pi\tau) = 0$. Bricht man diese Potenzreihen mit der h-ten Potenz ab, so ergeben sich bei den Wurzeln nur Fehler der Ordnung ε^{h+1}, solange $\frac{\partial P}{\partial \cos 2\pi\tau}_{|\varepsilon=0} \neq 0$ ist. Da außerhalb der Hauptdiagonale von (19) die Reihen erst mit der ersten Potenz von ε beginnen, ist dies nur dann nicht erfüllt, wenn

$$\Omega_{kk0} = \Omega_{mm0} \tag{20}$$

für mindestens ein Paar $k \neq m$ gilt. Wegen $(18)_0$ folgt aus (20) für $r_k, r_m \neq 0$:

$$r\,l = r_0\,l = |r_k \pm r_m|. \tag{21}$$

Dabei ist l einer der Werte $0, 1, 2, \ldots$. Es muß aber l so gewählt werden, daß r im zulässigen Bereich liegt. Wir werden im folgenden nicht jedesmal darauf hinweisen.

Wir schließen zunächst solche Werte $r = r_0$ aus, die (20) *erfüllen.* Aus (19) folgt

$$\prod_{m=1}^{n} (U_{mm} - \cos 2\pi\tau) = O(\varepsilon^2)$$

oder

$$\cos 2\pi\tau_k = \Omega_{kk0} + \varepsilon\,\Omega_{kk1} + O(\varepsilon^2) \quad (k = 1 \ldots n)^4). \tag{22}$$

Setzen wir noch die Werte (3) und (18) ein, so erhalten wir für $r_k \neq 0$

$$\cos 2\pi\tau_k = \cos 2\pi\,\frac{r_k}{r} + \frac{\varepsilon}{r\,r_k}\int_0^{2\pi} p_{kk0}(\xi)\cos\frac{r_k}{r}\,\xi \sin r_k\,\frac{\xi - 2\pi}{r}\,d\xi + O(\varepsilon^2), \tag{22a}$$

für $r_1 = 0$ dagegen

$$\cos 2\pi\tau_1 = 1 + \frac{\varepsilon}{r^2}\int_0^{2\pi} p_{110}(\xi)\,(\xi - 2\pi)\,d\xi + O(\varepsilon^2). \tag{22b}$$

---

4) Ist aber mindestens eines der $\Omega_{kk1} = 0$, so kann man aus (22a) in der fraglichen Zeile nur ersehen, in welchem Bereich von r $\cos 2\pi q_k =$ 1 wird, aus (22b) sind überhaupt keine Schlüsse mehr möglich. Ob Stabilität, Labilität oder Instabilität vorliegt, kann man dann nur aus (23) ersehen, falls die nächsten Glieder nicht verschwinden.

Wäre auch noch $r_2 = 0$, so würde (20) gelten, was wir ja zunächst ausschließen wollen. Gilt der Sachverhalte der Fußnote 4 oder ist E so groß, daß Glieder in ε^2 noch Einfluß haben können, so müssen wir die algebraische Gleichung

$$(23)\quad \begin{cases} \prod_{m=1}^{n} (\Omega_{m\,m\,0} + \varepsilon\,\Omega_{m\,m\,1} + \varepsilon^2\,\Omega_{m\,m\,2} - \cos 2\pi\,\tau) - \\ \qquad - \varepsilon^2 \sum_{\mu<\nu}^{n} \Omega_{\mu\,\nu\,1}\,\Omega_{\nu\,\mu\,1} \prod_{k}^{n\,(\mu,\nu)} (\Omega_{k\,k\,0} - \cos 2\pi\,\tau) + O(\varepsilon^3) = 0 \end{cases}$$

diskutieren. Dabei ist $\prod_{k}^{n\,(\mu,\nu)}$ das Produkt der $(n-2)$ von n Faktoren, die nicht die Indizes μ oder ν haben. Ist $r_k^2 < 0$, so erhält (22a) folgende Gestalt:

$$(24)\quad \begin{cases} \cos 2\pi\,\tau_k = \mathfrak{Cof}\, 2\pi\,\frac{|r_k|}{r} + \\ \qquad + \frac{\varepsilon}{r\,|r_k|} \int_0^{2\pi} p_{k\,k\,0}(\xi)\,\mathfrak{Cof}\,\frac{|r_k|}{r}\,\xi \cdot \mathfrak{Sin}\left(\frac{|r_k|}{r}\,(\xi - 2\pi)\right) d\xi + O(\varepsilon^2). \end{cases}$$

Aus (24) *folgt, daß* (2) *sicher instabil ist, falls nur ein* $r_k^2 < 0$ *und* ε *hinreichend klein ist.*

Damit wollen wir die Diskussion für $r_k^2 < 0$ abschließen. Ist ε hinreichend klein, so sind die Glieder $O(\varepsilon^2)$ in (22) und (24) reell.

Da die Integrale des Differentialgleichungssystems stetige Funktionen der Parameter sind, müssen auch die Grenzkurven zwischen stabilen und instabilen Bereichen in der r, ε-Ebene stetige Kurven sein. Für $\varepsilon = 0$ ist bei $r_k^2 > 0$ $\cos 2\pi\,\tau_k = \cos 2\pi\,\frac{r_k}{r}$. Für

$$(25)\qquad r = r_0 = \frac{2r_k}{l} \qquad (l = 1, 2, \ldots)$$

ergeben sich also auf der r-Achse labile Punkte. Wegen der stetigen Abhängigkeit der Wurzeln von r und ε können von diesen Punkten Instabilitätsbereiche ausgehen, in denen beliebig nahe an der r-Achse $|\cos 2\pi\,\tau| > 1$, aber reell ist. Auf der r-Achse treten Doppelwurzeln auf, falls (21) erfüllt ist. Von diesen Punkten können Instabilitätsbereiche ausgehen, in denen $\cos 2\pi\,\tau$ beliebig nahe an der r-Achse einen nichtverschwindenden Imaginärteil besitzt. Weiter sind noch Instabilitätsbereiche denkbar, die einen endlichen Abstand zur r-Achse haben. Wir müssen dabei beachten, daß wir wegen der Konvergenz der auftretenden Reihen nur den Streifen $0 \leqq \varepsilon < E$ betrachten können. E ist aber nach Abschnitt 2 nur wenig größer als $s_0 e^{-(4\pi n M + 1)}$. Diese Größe ist aber fast immer sehr viel kleiner als Eins. Aussagen über solche Bereiche sind daher auf Grund der von uns angewendeten Methode kaum zu erwarten.

Im Anschluß an Herrn METTLER [4] definieren wir:

Instabilitätsbereiche, die von Punkten (25) *der* r*-Achse ausgehen, heißen Bereiche erster Art. Instabilitätsbereiche, die von Punkten* (21) *der* r*-Achse ausgehen, heißen Bereiche zweiter Art. Bereiche, die im endlichen Abstand zur*

r-Achse bleiben, heißen Bereiche dritter Art. Daneben seien ausgeartete Bereiche solche, die durch $r_k = 0$ bedingt sind.

Nun können wir folgenden Satz formulieren:

Es sei für ein festes k $p_{kk1}(x)$ eine reellwertige Funktion der reellen Veränderlichen x, $r_k^2 > 0$ und $\Omega_{kk1} \not\equiv 0$. Dann beginnt auf der r-Achse in $r_0 = \frac{2r_k}{2l}$ ein Instabilitätsbereich erster Art, falls $\Omega_{kk1}(r_0) > 0$ ist und in $\bar{r}_0 = \frac{2r_k}{2l-1}$ ein ebensolcher Bereich, falls $\Omega_{kk1}(\bar{r}_0) < 0$ ist, solange $r_0, \bar{r}_0$ im zulässigen Intervall der r-Achse liegt und nicht der Bedingung (21) genügt. Dabei durchlaufe l die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$. Werden diese Bedingungen auch nur für ein einziges k erfüllt, so ist (2) für die in dem fraglichen Bereich der r, ε-Ebene liegende Parameterwerte instabil. Ist aber $r_1 = 0$, so ist (2) für alle die r instabil, für die $\Omega_{111} > 0$ ist[5]).

Ist mindestens eines der $\Omega_{kk1} = 0$ oder ist (21) erfüllt, so kann man auch für beliebig kleine ε aus (22) keine vollständige Aussage über das Stabilitätsverhalten machen. In diesem Fall müssen wir (23) benutzen. Für beliebiges n und allgemeine Koeffizientenfunktionen kann kaum etwas über die Lage der Wurzeln gesagt werden. Daher sollen im folgenden Abschnitt die für $n = 2$ auftretenden Fälle kurz charakterisiert werden.

5. Der Fall $n = 2$.

Aus (19) ergibt sich

$$\cos^2 2\pi\tau - (U_{11} + U_{22}) \cos 2\pi\tau + (U_{11} U_{22} - U_{12} U_{21}) = 0$$

oder

$$\cos 2\pi\tau = \tfrac{1}{2}(U_{11} + U_{22}) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(U_{11} - U_{22})^2 + 4 U_{12} U_{21}}.$$

Ist $\Omega_{110} \neq \Omega_{220}$, ist also (21) nicht erfüllt, so erhalten wir

$$\cos 2\pi\tau_1 = \Omega_{110} + \varepsilon\Omega_{111} + \varepsilon^2\left[\Omega_{112} + \frac{\Omega_{121}\Omega_{211}}{\Omega_{110} - \Omega_{220}}\right] +$$

$$+ \varepsilon^3\left[\Omega_{113} + \frac{\Omega_{121}\Omega_{212} + \Omega_{122}\Omega_{211}}{\Omega_{110} - \Omega_{220}} - \Omega_{121}\Omega_{211}\frac{\Omega_{111} - \Omega_{221}}{(\Omega_{110} - \Omega_{220})^2}\right] + O(\varepsilon^4),$$

$$\cos 2\pi\tau_2 = \Omega_{220} + \varepsilon\Omega_{221} + \varepsilon^2\left[\Omega_{222} - \frac{\Omega_{121}\Omega_{211}}{\Omega_{110} - \Omega_{220}}\right] +$$

$$+ \varepsilon^3\left[\Omega_{223} - \frac{\Omega_{121}\Omega_{212} + \Omega_{122}\Omega_{211}}{\Omega_{110} - \Omega_{220}} + \Omega_{121}\Omega_{211}\frac{\Omega_{111} - \Omega_{221}}{(\Omega_{110} - \Omega_{220})^2}\right] + O(\varepsilon^4).$$

Ist nun $\Omega_{111} = 0$ oder $\Omega_{221} = 0$ oder $\Omega_{111} = \Omega_{221} = 0$, so entscheidet jetzt das Zeichen des Koeffizienten von ε^2, ob in Punkten (25) ein Bereich erster Art beginnt. Er wäre dann von zweiter Ordnung klein. Verschwindet auch noch

[5]) Es sei darauf hingewiesen, daß alle $\Omega_{kk1} = 0$ sind, falls alle Funktionen $p_{kk0}(x)$ im ganzen Periodizitätsintervall sich in gleichmäßig konvergente FOURIERsche Reihen entwickeln lassen, wie aus $(18)_1$ folgt.

dieser Koeffizient, so gibt es höchstens Bereiche der Ordnung ε^3. Dann entscheidet über die Existenz das Zeichen des Koeffizienten von ε^3. Ist $\Omega_{111} \neq 0$ bzw. $\Omega_{221} \neq 0$, so gilt der aus (22) gefolgerte Satz.

Jetzt wollen wir Punkte der r, ε-Ebene betrachten, die oberhalb von Punkten r_0 der r-Achse liegen, die (21) erfüllen. Wir erhalten

$$\cos 2\pi \tau_{1,2} = \Omega_{110} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\Omega_{111} + \Omega_{221} \pm \sqrt{D_1}\right) + O(\varepsilon^2) \tag{26}$$

mit $D_1 = (\Omega_{111} - \Omega_{221})^2 + 4\,\Omega_{121}\,\Omega_{211}$. Damit ergibt sich folgender Satz:

Gilt (21) *und ist* $D_1 < 0$, *so liegt ein Instabilitätsbereich zweiter Art vor. Die Bereiche zweiter Art haben im allgemeinen dieselbe Größenordnung wie die Bereiche erster Art. Ist für ein* r_0 (21) *erfüllt, so liegt ein Instabilitätsbereich erster Art vor, wenn in* (26) $D_1 > 0$ *ist, dazu bei* $\frac{2lr_k}{|r_1 \pm r_2|} = l_1$ $(l_1 = 1, 2, \ldots\, l = 0, 1, 2, \ldots$ $k = 1, 2)$ *und*

$$l_1 \equiv 0\,(2) \quad \textit{mit} \quad \Omega_{111} + \Omega_{221} + \sqrt{D_1} > 0$$

oder

$$l_1 \equiv 1\,(2) \quad \textit{mit} \quad \Omega_{111} + \Omega_{221} - \sqrt{D_1} < 0$$

sich ergibt.

Ist $\Omega_{111} = \Omega_{221} = \Omega_{121} = \Omega_{211} = 0$, so müssen wir statt (26)

$$\cos 2\pi \tau_{1,2} = \Omega_{110} + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\Omega_{112} + \Omega_{222} \pm \sqrt{(\Omega_{112} - \Omega_{222})^2 + 4\,\Omega_{122}\,\Omega_{212}}\right) + O(\varepsilon^3)$$

diskutieren. $\Omega_{111} + \Omega_{221} \pm \sqrt{D_1} = 0$ könnte zwar unter geringeren Voraussetzungen erfüllt sein, doch diese sind ohne praktische Bedeutung. Analog ist vorzugehen, wenn weitere Koeffizienten verschwinden.

Ist $r_1 = r_2 = 0$, so ergibt sich Instabilität für alle r, für die $\Omega_{111} + \Omega_{221} + \sqrt{D_1} > 0$ bei $D_1 > 0$ bzw. $D_1 < 0$ ist.

6. Schlußbemerkungen.

Für $n \geqq 3$ führt die Diskussion der Bereiche zweiter Art auf die Untersuchung von Diskriminanten. Bereiche dritter Art wird man wegen des recht kleinen Konvergenzradius unserer Darstellung kaum mit unserer Methode nachweisen können.

Besondere Bedeutung für praktische Probleme hat der Spezialfall $p_{k\lambda 0} = b_{k\lambda} \cos x$, $p_{k\lambda\beta} = 0$ für $\beta \geqq 1$[6]. Dabei seien die $b_{k\lambda}$ Konstante. Hier werden alle $\Omega_{kk1} \equiv 0$, so daß man mit (22) für die Bereiche erster Art nicht auskommt. Es gibt also keine Bereiche erster Art der Ordnung ε, der Ordnung ε^2 nur für $r_0 = 2r_k$ $(k = 1 \ldots n)$. Auch bei den r_0, die (21) erfüllen, verschwinden mit wachsendem l immer mehr Anfangsglieder $\Omega_{k\lambda\nu}$ bei $\nu \geqq 1$. Dieser Spezialfall soll an einer anderen Stelle ausführlicher untersucht werden.

[6]) Zum Beispiel [2], [4], [6].

Literatur.

[*1*] Cesari, L.: Sulla stabilita delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coeffizienti periodici. Atti Accad. Ital. Mem. (6) **11**, 633—695 (1940). — [*2*] Haacke, W.: Über die freien Schwingungen in n-fachen Netzwerken mit pulsierenden Parametern. Arch. elektr. Übertr. **6**, 114—119 (1952). — [*3*] Haacke, W.: Über die Stabilität eines Systems von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, die von Parametern abhängen. I. Math. Z. **56**, 65—79 (1952). — [*4*] Mettler, E.: Allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper. Ing.-Arch. **17**, 418—449 (1949). — [*5*] Perron, O.: Über die Entwickelbarkeit der Integrale von Differentialgleichungen nach Potenzen eines Parameters und der Anfangswerte. Math. Ann. **113**, 292—303 (193). — [*6*] Weidenhammer, F.: Der eingespannte, achsial pulsierend belastete Stab als Stabilitätsproblem. Ing.-Arch. **19**, 162—191 (1951).

Braunschweig, Heinrichstr. 7.

(Eingegangen am 22. April 1952.)

Lenz, H.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 46—64 (1952)

Über Orthogonaltrajektorien.

Von
Hanfried Lenz.

Einleitung.

Die Orthogonaltrajektorien (abgekürzt O.T.) von Kugelscharen sind bekanntlich die räumliche Verallgemeinerung der Traktorien oder Zuglinien von Huygens[1], [2]. Darboux und Bianchi haben die Ermittlung der O.T. von Kreis-[3]) und Kugelscharen[4]), [5]) auf die Integration einer Riccatischen Differentialgleichung zurückgeführt. Daraus kann man schließen, daß die einzelnen Scharkugeln durch die O.T. kreistreu aufeinander abgebildet werden. In der vorliegenden Arbeit, die möglichst die Anschauung heranziehen und Rechnungen einschränken will, soll der umgekehrte Weg beschritten werden. Nach allgemeinen Betrachtungen über die Abbildung der Flächen einer Schar aufeinander[6]) durch ihre O.T., die auch einen bequemen Weg zu einigen klassischen Sätzen geben, zeigen wir, daß die O.T. die Scharkugeln umkehrbar eindeutig und konform, also kreistreu aufeinander abbilden. Dieser Satz gilt für Kugeln beliebiger Dimensionszahl m im n-dimensionalen Raum. Für $m \leqq 2$ werden daraus die Darbouxschen Ergebnisse in anderer und etwas allgemeinerer Form hergeleitet. Die von Darboux, Bianchi und Voss angegebenen Riccatischen Differentialgleichungen werden mit Hilfe Liescher Gedanken[7]) aufgestellt. Dieser gegenüber Darboux umgekehrte Weg dürfte den anschaulich-geometrischen Gehalt des behandelten Problems besonders deutlich machen. Nach Erweiterungen eines Vossschen Satzes[2]) über sphärische O.T. folgt die Betrachtung solcher Scharen, die aus einer Kugel durch eine kontinuierliche Gruppe konformer Raumtransformationen hervorgehen, was auf eine besonders einfache Darstellung bekannter Ergebnisse[1]) [2]) führt. In § 4 behandeln wir das Problem der geschlossenen O.T. und beweisen einen von F. Löbell[8])

[1]) Loria, G.: Spezielle algebraische und transzendente Kurven, insbes. S. 562ff. Leipzig 1902.

[2]) Voss, A.: Zur Theorie der Kurven im Raume. Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss. 1918, 283—354, insbes. § VII, IX—XI, XIII.

[3]) Darboux, G.: Leçons sur la théorie générale des surfaces, insbes. Bd. I (1. Aufl.), S. 113 und Bd. I (2. Aufl., 1914), S. 145.

[4]) Darboux, G.: Leçons sur les systèmes orthogonaux, S. 26—50, insbes. S. 41. Paris 1898.

[5]) Bianchi, L.: Lezioni di geometria differenziale, Bd. I/1, insbes. S. 55—60. Bologna 1927.

[6]) Vgl. Löbell, F.: Allgemeine Theorie der Flächenabbildungen, Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst, Nr. 5. Berlin 1942.

[7]) Lie-Scheffers: Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen, insbes. S. 766—777. Leipzig 1893.

[8]) Nach mündlicher Mitteilung von Herrn Prof. Löbell, dem ich die Anregung zu dieser Arbeit und viele wertvolle Hinweise verdanke.

vermuteten Satz. Wenn man von gewissen Ausnahmefällen absieht, hat eine geschlossene Kugelschar stets genau zwei geschlossene O.T., denen sich alle O.T. bei wiederholter Durchlaufung der Schar asymptotisch annähern und die überdies bei konstantem Kugelradius gleich lang sind. Es folgt noch eine Ausdehnung dieser Sätze auf Eiflächenscharen und m-dimensionale Kugelscharen.

§ 1. Zur Begriffsbestimmung der Flächenscharen und der O.T.

1. Zunächst sollen die Begriffe „Kurven- bzw. Flächenschar" und „O.T." so präzisiert werden, daß sie eine brauchbare Grundlage für das Weitere geben. An unsere Flächenscharen stellen wir folgende Forderungen, die wir gleich für einfach unendliche Scharen m-dimensionaler Mannigfaltigkeiten (M_m) im n-dimensionalen Raum (R_n) formulieren:

F_I. Der Ortsvektor der Scharmannigfaltigkeiten gestatte in einem Bereich $\mathfrak{B}$ des R_n eine Parameterdarstellung ($\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_n$ seien die Grundvektoren eines rechtwinkeligen, cartesischen Koordinatensystems)

$$\mathfrak{r} = x_1 \mathfrak{i}_1 + x_2 \mathfrak{i}_2 + \cdots + x_n \mathfrak{i}_n = \mathfrak{r}(p_1, \ldots, p_m, t),$$

wobei t der Scharparameter („die Zeit") und $p_1, p_2, \ldots, p_m$ die Gaussschen Parameter der einzelnen Scharmannigfaltigkeiten seien. Alle partiellen Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ bis zur 3. Ordnung, in denen nur höchstens eine Differentiation nach t vorkommt, seien stetige Funktionen von $p_1, \ldots, p_m, t$, also von der Differentiationsreihenfolge unabhängig.

F_{II}. Die Ableitungsvektoren $\mathfrak{r}_{p_1}, \ldots, \mathfrak{r}_{p_m}$ seien in $\mathfrak{B}$ linear unabhängig, d.h. jede Schar-M_m habe einen eindeutig bestimmten Tangential-R_m.

Unter der Einhüllenden[8a]) der Schar verstehen wir die Gesamtheit aller Punkte der Schar-M_m, für die die Ableitungsvektoren $\mathfrak{r}_{p_1}, \mathfrak{r}_{p_2}, \ldots, \mathfrak{r}_{p_m}, \mathfrak{r}_t$ linear abhängig sind.

Für den Ortsvektor $\mathfrak{x}$ der O.T. erhalten wir zunächst

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \dot{\mathfrak{x}} = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{r}_{p_i} \dot{p}_i + \mathfrak{r}_t .$$

Die Orthogonalitätsbedingungen $\dot{\mathfrak{x}}\, \mathfrak{r}_{p_j} = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, m$ liefern das Differentialgleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{m} \mathfrak{r}_{p_i} \mathfrak{r}_{p_j} \dot{p}_i + \mathfrak{r}_{p_j} \mathfrak{r}_t = 0 .$$

Es läßt sich eindeutig nach den $\dot{p}_i$ auflösen, weil die Determinante des Systems wegen F_{II} $\neq 0$ ist. Die $\dot{p}_i$ werden also rationale Funktionen der Skalarprodukte $\mathfrak{r}_{p_i} \mathfrak{r}_{p_k}, \mathfrak{r}_{p_i} \mathfrak{r}_t$, d.h. (wegen F_I) zweimal stetig nach den p_i partiell differenzierbare Funktionen von $p_1, \ldots, p_m$ und t. Nach einem grundlegenden Satz von Lindelöf[9]) existieren daher die Lösungsfunktionen $p_i(t, t_0, p_{10}, \ldots, p_{m0})$ dieses

[8a]) Dieser Einhüllendenbegriff ist allgemeiner als der übliche; vgl. Kowalewski, G.: Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie, S. 24 oben. Berlin 1931.

[9]) Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. I, S. 34. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft 1942.

Systems, geben die O.T. durch den Punkt $t=t_0$, $p_i=p_{i0}$ an, sind stetig und haben stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach den Integrationskonstanten p_{i0} und nach t, solange nur höchstens einmal nach t differenziert wird. Insbesondere ist

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial p_{j0}\partial t}=\frac{\partial^2 p_i}{\partial t\,\partial p_{j0}}, \qquad \frac{\partial^2 p_i}{\partial p_{j0}\partial p_{k0}}=\frac{\partial^2 p_i}{\partial p_{k0}\partial p_{j0}}.$$

Durch Anwendung der Regeln für die partielle Differentiation und unter Berücksichtigung der Forderung F_I folgt daraus, daß auch für den Ortsvektor $\mathfrak{x}(t, t_0, p_{10}, \ldots, p_{m0})$ die Ableitungen

$$\mathfrak{x}_{p_{i0}p_{j0}}=\mathfrak{x}_{p_{j0}p_{i0}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_{p_{i0}t}=\mathfrak{x}_{tp_{i0}}$$

existieren und stetig sind. Wir haben damit

Hilfssatz 1. *Durch jeden Punkt einer Scharmannigfaltigkeit (mit dem Scharparameter t_0 und den* GAUSSschen *Parametern p_{i0}, $i=1, \ldots, m$) geht genau eine O.T. mit dem Ortsvektor $\mathfrak{x}(t, t_0, p_{10}, \ldots, p_{m0})$. Die Scharmannigfaltigkeiten werden durch die O.T. umkehrbar eindeutig und zweimal stetig differenzierbar aufeinander abgebildet. Führt man $u_i=p_{i0}$ als neue* GAUSSsche *Parameter der Scharmannigfaltigkeiten ein, so haben auf einer O.T. liegende Punkte gleiche Parameterwerte u_i. In den neuen Parametern sind die Ableitungen $\mathfrak{r}_{u_i}$, $\mathfrak{r}_t$, $\mathfrak{r}_{u_iu_k}=\mathfrak{r}_{u_ku_i}$, $\mathfrak{r}_{u_it}=\mathfrak{r}_{tu_i}$ stetige Vektorfunktionen aller Parameter.*

Die Gleichungen

$$\mathfrak{r}_{u_iu_j}=\mathfrak{r}_{u_ju_i}, \qquad \mathfrak{r}_{u_it}=\mathfrak{r}_{tu_i}$$

sind nämlich nichts anderes als die oben gefundenen Beziehungen

$$\mathfrak{x}_{p_{i0}p_{j0}}=\mathfrak{x}_{p_{j0}p_{i0}}, \qquad \mathfrak{x}_{p_{i0}t}=\mathfrak{x}_{tp_{i0}}.$$

Wir wollen eine Parameterdarstellung, in der Punkte auf einer O.T. sich nur durch den Parameter t unterscheiden, eine *Normaldarstellung* einer M_m-Schar nennen.

2. Satz 1 gilt unabhängig davon, ob die O.T. einzelne Singularitäten (z.B. Spitzen) haben oder gar für ganze Zeitintervalle in einen Punkt zusammenfallen. Doch können solche Singularitäten nur auftreten, wenn $\dot{\mathfrak{x}}=0$ ist, also die Ableitungsvektoren $\mathfrak{r}_{p_i}$, $\mathfrak{r}_{p_2}$, $\ldots$, $\mathfrak{r}_{p_m}$ und $\mathfrak{r}_t$ an der betreffenden Stelle linear abhängig sind, d.h. an Punkten der Einhüllenden. Man kann übrigens die Singularitäten immer ausschalten. Zu diesem Zweck fassen wir die gegebene Schar als n-dimensionale Projektion (verallgemeinerten Grundriß) einer $(n+1)$-dimensionalen Schar auf, indem wir jeder Schar-M_m noch eine etwa der Zeit proportionale $(n+1)$-te Koordinate x_{n+1} geben. Bei der Projektion gehen die O.T. der $(n+1)$-dimensionalen Schar auf der von ihr gebildeten M_{m+1} offenbar in die O.T. der n-dimensionalen Schar über. Die $(n+1)$-dimensionale Schar hat sicher keine Einhüllende mehr, ihre O.T. sind also singularitätenfrei.

Die folgende Verallgemeinerung dieses „Aufsteigens in den R_{n+1}" bzw. seiner Umkehrung, der Projektion in den „Grundriß", liegt nahe (der Einfachheit halber betrachten wir nur den Fall $m=1$, $n=2$):

Wir können eine beliebige räumliche Schar ebener Kurven in eine ebene Schar überführen, indem wir als (im allgemeinen gekrümmte) „Projektionsstrahlen" die O.T. der die Scharkurven tragenden Ebenen wählen, oder anschaulich gesprochen, die Schar durch Abwicklung der die Scharkurven tragenden Ebenenschar in die Ebene rollen. Bekanntlich bildet diese Übertragung alle Scharkurven kongruent ab und die O.T. der räumlichen Schar gehen in die der ebenen über.

Die Verallgemeinerung dieser Betrachtung auf Flächenscharen und Scharen von in $(m+k)$-dimensionalen linearen Räumen liegenden m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im R_n macht keinerlei grundsätzliche Schwierigkeiten und sei daher hier nur angedeutet.

§ 2. Die Abbildung durch die O.T.

3. Wir ersetzen unsere Forderungen F_I und F_{II} des vorigen Paragraphen nun durch die folgende

F_N. Eine Flächenschar (im allgemeinen Fall Schar von ∞^1 m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten) im Raum (allgemein im R_n) sei in Normaldarstellung $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v, t)$ (allgemein $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u_1, \ldots, u_m, t)$) gegeben mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung (außer $\mathfrak{r}_{tt}$, über dessen Existenz nichts vorausgesetzt wird), und es sei $\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v \neq 0$ (im allgemeinen Fall: Die von den $m \cdot n$ Koordinaten der Vektoren $\mathfrak{r}_{u_1}, \mathfrak{r}_{u_2}, \ldots, \mathfrak{r}_{u_m}$ gebildete Funktionalmatrix habe den Rang m oder: die Vektoren $\mathfrak{r}_{u_1}, \ldots, \mathfrak{r}_{u_m}$ seien linear unabhängig). Analytisch drückt sich die Aussage, daß u, v, t bzw. $u_1, \ldots, u_m, t$ Parameter einer Normaldarstellung sind, durch die Beziehungen $\mathfrak{r}_u \mathfrak{r}_t = \mathfrak{r}_v \mathfrak{r}_t = 0$ (bzw. $\mathfrak{r}_{u_i} \mathfrak{r}_t = 0$ für $i = 1, 2, \ldots, m$) aus.

Die Voraussetzungen F_I und F_{II} werden jetzt nicht mehr benötigt. Wir werden vielmehr alle weiteren Schlüsse aus F_N ziehen. F_I und F_{II} mußten eingeführt werden — da eine gegebene Schar im allgemeinen nicht in Normaldarstellung vorliegt —, um die *Möglichkeit* einer Normaldarstellung zu sichern. Um die Abbildung der Scharflächen aufeinander durch die O.T., die im kleinen affin ist [F. Löbell[6]), S. 301] zu untersuchen, betrachten wir die *erste Grundform* in einem Punkt P

$$I = ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \mathfrak{r}_u^2\,du^2 + 2\mathfrak{r}_u\mathfrak{r}_v\,du\,dv + \mathfrak{r}_v^2\,dv^2.$$

$\mathfrak{n}$ sei der Normaleneinheitsvektor in Richtung der Bewegung von P, $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$ die Geschwindigkeit dieser Bewegung längs der O.T.; dann ist $d\sigma$ das Bogenelement der O.T. durch P. Es wird

$$\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} = \dot{\sigma}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \sigma} = \dot{\sigma}\,\mathfrak{n}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{r}_u}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{r}_t}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(\dot{\sigma}\,\mathfrak{n}).$$

Wegen $\mathfrak{r}_u\,\mathfrak{n} = 0$ folgt daraus

(1) $\quad \frac{\partial E}{\partial t} = 2\dot{\sigma}\,\mathfrak{r}_u\,\mathfrak{n}_u$ und ebenso $\frac{\partial F}{\partial t} = 2\dot{\sigma}\,\mathfrak{r}_u\,\mathfrak{n}_v = 2\dot{\sigma}\,\mathfrak{r}_v\,\mathfrak{n}_u$; $\frac{\partial G}{\partial t} = 2\dot{\sigma}\,\mathfrak{r}_v\,\mathfrak{n}_v$.

(Diese Formeln gelten auch für Flächenscharen in Räumen höherer Dimension. $\mathfrak{n}$ ist dann der tangential zu der die Flächenschar tragenden dreidimensionalen Mannigfaltigkeit liegende Normaleneinheitsvektor.) Für gewöhnliche Flächenscharen führen wir die zweite Grundform

$$II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = -\mathfrak{r}_u\,\mathfrak{n}_u\,du^2 - 2\mathfrak{r}_u\,\mathfrak{n}_v\,du\,dv - \mathfrak{r}_v\,\mathfrak{n}_v\,dv^2$$

ein und erhalten im Fall $\dot{\sigma} \neq 0$

$$\frac{\partial I}{\partial \sigma} = -2 \cdot II, \quad \text{in Worten:} \tag{2}$$

Hilfssatz 2. *Die Ableitung des ersten Fundamentaltensors der Scharfläche nach der Bogenlänge der O.T. ist der doppelte negative zweite Fundamentaltensor.*

Unsere Formel (2) ist nur eine andere, für unsere Zwecke allerdings besonders geeignete, Schreibweise eines wohlbekannten Sachverhalts[8]). Auf einer von der einfach unendlichen Schar der O.T. mit $v = \text{const}$ gebildeten Fläche $\mathfrak{F}_n$ bilden nämlich die Linien $u = \text{const}$ (d.h. die O.T.) und $t = \text{const}$ ein orthogonales Kurvennetz mit einem Linienelement

$$ds^2 = E\,du^2 + \overline{G}\,dt^2.$$

Dann gilt die bekannte Formel

$$\mathcal{G} = \mathcal{N} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log E}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sqrt{E\overline{G}}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial t}\ [10), 11)]$$

für die geodätische Krümmung $\mathcal{G}$ der Kurve $t = \text{const}$ auf $\mathfrak{F}_n$, d.h. für die Normalkrümmung $\mathcal{N}$ derselben Kurve auf der Scharfläche. Diese Formel bedeutet geometrisch dasselbe wie unsere Formel (2).

Für die Abbildung längs eines endlichen O.T.-Bogens gilt die Formel

$$I(\sigma_1) = I(\sigma_0) - 2\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} II\,d\sigma = I(\sigma_0) - 2\int_{t_0}^{t_1} II(t)\cdot\dot{\sigma}\,dt. \tag{3}$$

Der lineare Abbildungsmaßstab $m(\sigma_1, \sigma_0) = \sqrt{\frac{I(\sigma_1)}{I(\sigma_0)}} = \sqrt{\frac{I_1}{I_0}}$ [6), S. 302] wird

$$m(\sigma_1, \sigma_0) = e^{\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \mathcal{N}\,d\sigma}. \tag{4}$$

Denn nach (2) ist

$$\frac{\partial m^2}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{I}{I_0} = -2\cdot\frac{II}{I_0} = -2\cdot\frac{II}{I}\cdot\frac{I}{I_0} = 2\mathcal{N}\cdot m^2.$$

Dabei ist $\mathcal{N}$ die Normalkrümmung des betreffenden Kurvenelements. Sie ist negativ, wenn $\mathfrak{n}$ nach dem Krümmungszentrum des zugehörigen Normalschnitts weist, und positiv, wenn $\mathfrak{n}$ entgegengesetzt gerichtet ist.

---

[10]) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, 3. Aufl., Bd. I, S. 150, Formel (12). Berlin 1930.

[11]) CESARO, E.: Vorlesungen über natürliche Geometrie, insbes. S. 143, (14); S. 198 (3); S. 271 (3); S. 305, (8). Leipzig 1901. Deutsch von G. KOWALEWSKI.

Entsprechend wird der Flächenmaßstab [6), S. 303]

$$M(\sigma_1, \sigma_0) = e^{2\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} H\, d\sigma}, \tag{5}$$

wobei H die mittlere Krümmung bedeutet.

Satz 1. *Die Abbildung der Scharflächen aufeinander durch die O.T. ist dann und nur dann überall a) flächentreu, b) konform, c) längentreu, wenn sämtliche Scharflächen a) Minimalflächen, b) Kugeln [einschließlich Ebenen], c) Ebenen sind.*

Beweis. Die Behauptung a) folgt unmittelbar aus (5). Um Behauptung b) einzusehen, führen wir auf der Ausgangsfläche Krümmungslinienparameter ($F = M = 0$) ein. Nach (3) ist dann und nur dann längs der ganzen O.T. $F = 0$, wenn auch $M = 0$ ist, d.h. wenn die Hauptkrümmungsrichtungen bei der Abbildung erhalten bleiben. Daraus folgt übrigens unmittelbar der klassische Dupinsche Satz über dreifache Orthogonalsysteme[12]). Zwei gegeneinander verdrehte rechte Winkel in einem Flächenpunkt bleiben aus demselben Grund genau dann erhalten, wenn die O.T. auf allen Scharflächen Nabelpunkte ausschneidet. Die Abbildung ist also überall konform, wenn und nur wenn alle Scharflächen aus lauter Nabelpunkten bestehen, d.h. Kugeln (einschließlich Ebenen) sind. Behauptung c) folgt aus a) und b). Aus Satz 3 b) ergibt sich übrigens unmittelbar der Liouvillesche Satz, daß jede konforme Abbildung des Raumes in sich eine Kugelverwandtschaft ist, da jedes aus Scharen paralleler Ebenen bestehende Orthogonalsystem in ein System aus Kugeln übergehen muß. Weitere direkte Folgerungen aus Satz 2 sind

Satz 2. *Die Hauptlinien* [F. Löbell[6]), S. 302] *der infinitesimalen Abbildung durch die O.T. sind die Krümmungslinien.*

Satz 3. *Für die Hauptmaßstäbe der endlichen Abbildung gelten die Ungleichungen*

$$\begin{cases} m_I \leq e^{\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \mathfrak{N}_I\, d\sigma} \\ m_{II} \geq e^{\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \mathfrak{N}_{II}\, d\sigma}, \end{cases} \tag{6}$$

wobei $\mathfrak{N}_I$ die größere, $\mathfrak{N}_{II}$ die kleinere der beiden Hauptkrümmungen ist. (m_I ist der größere der beiden Hauptmaßstäbe.) Für die maximale Winkeländerung ω erhalten wir [6), S. 303]

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{m_I}{m_{II}}} - \sqrt{\frac{m_{II}}{m_I}}\right) \leq \operatorname{Sin} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{\mathfrak{N}_I - \mathfrak{N}_{II}}{2}\, d\sigma. \tag{7}$$

Das Gleichheitszeichen gilt für jede O.T. längs nabelpunktfreier Bögen in einer dieser Ungleichungen (und dann in allen), wenn und nur wenn die Flächenschar

[12]) Enzykl. math. Wiss. III D 9 (Salkowski), S. 548, insbes. Fußnote [17]).

eine LAMÉ*sche Schar ist, d.h. sich zu einem dreifachen Orthogonalsystem ergänzen läßt.*

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt aus (4), ebenso [nach [6]), S. 303] die Ungleichung (7). Das Gleichheitszeichen kann in einer der Ungleichungen (6) nur gelten, wenn $\mathfrak{N}$ stets eine Hauptkrümmung ist. Dann bleibt bei der Abbildung durch die O.T. das Netz der Krümmungslinien erhalten, d.h. es gilt auch für die zweite Ungleichung (6) und (7) das Gleichheitszeichen. Die Flächen, die von den O.T. durch je eine Krümmungslinie der Ausgangsscharfläche gebildet werden, erzeugen dann mit den Scharflächen ein dreifaches Orthogonalsystem. Daß umgekehrt für die Abbildung einer LAMÉschen Schar durch ihre O.T. in (6) und (7) das Gleichheitszeichen gelten muß, folgt aus dem DUPINschen Theorem. Wenn schließlich in (7) das Gleichheitszeichen gilt, so folgt, daß dies auch für (6) der Fall ist.

Die Sätze 1 bis 3 lassen sich mit den zugehörigen Formeln fast unverändert auf Hyperflächenscharen im n-dimensionalen Raum übertragen, ebenso auf Scharen m-dimensionaler Mannigfaltigkeiten im R_n. Darauf soll hier nicht näher eingegangen werden. Wir werden im folgenden nur bei der Betrachtung von Scharen mehrdimensionaler Kugeln von der entsprechenden Verallgemeinerung des Satzes 1 b) Gebrauch machen. Eine Einführung in die n-dimensionale Differentialgeometrie findet sich z.B. in dem bereits erwähnten Werk von E. CESÀRO[11]), auf das für eingehendere Studien verwiesen sei.

§ 3. Kreis- und Kugelscharen.

4. Wir rechnen die Ebenen stets mit zu den Kugeln, die Geraden zu den Kreisen. Andernfalls sprechen wir von *eigentlichen* Kugeln, Kugelscharen usw. Punkte als ausgeartete Kugeln oder Kreise lassen wir *nicht* zu. Aus den Ergebnissen des vorigen Paragraphen folgt nun unmittelbar der bekannte [DARBOUX[4]), S. 42, BIANCHI[5]), S. 60] Satz: *Durch die O.T. werden die Kugeln einer Schar kreisverwandt aufeinander abgebildet. Betrachtet man sie als* RIEMANN*sche Zahlenkugeln einer komplexen Variabeln z, so drückt sich die Abbildung durch die O.T. von einer Scharkugel auf die andere durch eine lineare Substitution*

$$z(t) = \frac{a(t)\, z(t_0) + b(t)}{c(t)\, z(t_0) + d(t)}$$

aus.

Denn eine umkehrbar eindeutige und konforme Abbildung zweier Kugeln aufeinander mit Erhaltung der Orientierung ist nach einem bekannten funktionentheoretischen Satz eine lineare Abbildung. Will man mit weniger Funktionentheorie auskommen, so kann man die Kugelschar als räumlichen Schnitt einer Schar dreidimensionaler Kugeln im R_4 auffassen. Die dreidimensionalen Kugeln werden nach dem verallgemeinerten Satz 3 b) konform, also nach dem LIOUVILLEschen Theorem kugelverwandt aufeinander abgebildet. Die entsprechende Methode des Aufsteigens in den Raum liefert für ebene Kreisscharen den bekannten Satz: *Die O.T. einer Kreisschar bilden die Scharkreise*

so aufeinander ab, daß die (reellen) Doppelverhältnisse erhalten bleiben [DARBOUX[3]), Bd. I (1. Aufl.), S. 116].

Das gilt nach der Betrachtung am Schluß von § 1 auch für räumliche Kreisscharen. Für diesen Fall stammt der Satz von DEMARTRES, der ihn anläßlich seiner Untersuchungen über zyklische Flächen fand [DARBOUX[3]), Bd. I (2. Aufl.), S. 145; Bd. IV, S. 494].

Allgemeiner gilt

Satz 4. *Die O.T. einer einfach unendlichen Schar von m-dimensionalen Kugeln* (S_m) *auf einer* $(m+1)$*-dimensionalen Mannigfaltigkeit im* R_n $(n > m)$ *bilden die Scharkugeln kreistreu (im Fall* $m = 1$ *projektiv, d.h. doppelverhältnistreu) aufeinander ab.*

Beweis. Für $m + 1 = n$ und $m > 2$ (für $m \leqq 2$ sind wir fertig) folgt die Behauptung aus dem verallgemeinerten Satz 1 b) und dem (auch daraus folgenden) m-dimensionalen LIOUVILLEschen Theorem. Falls aber $n > m + 1$ ist, wickle man die Schar nach dem am Schluß von § 1 angegebenen Verfahren in einen R_{m+1} ab und führe so den allgemeinen Fall auf den bereits erledigten zurück.

Aus dem DEMARTRESschen Sonderfall $m = 1$, $n = 3$ ergibt sich auch ohne weiteres der RIBAUCOURSche Satz: *Hat eine doppelt unendliche Kreisschar im Raum drei Orthogonalflächen, so besteht sie aus O.T. einer Flächenschar*[13]). Auch dieser Satz gestattet auf Grund unserer Betrachtungsweise mehrdimensionale Verallgemeinerungen.

5. Für Kugelscharen ($m = 2$, n beliebig) und Kreisscharen (Schnitte von Kugelscharen) ergibt sich aus den Sätzen 6 und 8 die folgende Erweiterung des in der Einleitung erwähnten DARBOUXschen Ergebnisses:

Satz 5. *Wenn man die Scharkugeln nach irgendeinem stetig differenzierbar von der Zeit abhängigen Gesetz als Zahlenkugeln einer komplexen Koordinate* z_t *auffaßt, und wenn* $z_t(t)$ *im Koordinatensystem* (z_t) *den Schnittpunkt einer festen O.T. mit der zum Parameter t gehörigen Scharkugel bezeichnet, so genügt* $z_t(t)$ *einer* RICCATIschen *Differentialgleichung*

$$\frac{dz_t(t)}{dt} = A(t)\, z_t(t)^2 + B(t)\, z_t(t) + C(t). \tag{8}$$

Jede Lösung dieser Differentialgleichung stellt dann eine O.T. der Schar dar.

Beweis. Die Abbildung von $z_0(0)$ auf $z_t(t)$ ist eine (im allgemeinen gebrochen) lineare, daraus folgt die Behauptung nach einem bekannten und leicht einzusehenden Satz von S. LIE [LIE-SCHEFFERS[7]), S. 771, Satz 4]. Da man die Differentialgleichungen der O.T. in gewöhnlichen Koordinaten stets aufstellen kann, erfordert die Ermittlung der Differentialgleichung (8) nur elementare Operationen und Differentiationen. Man kann (8) auch direkt erhalten, wenn man die infinitesimale Substitution [wir schreiben kurz $z(t)$ für $z_t(t)$]

$$z(t + dt) = \frac{z(t)\,(1 + \alpha(t)\,dt) + \beta(t)\,dt}{z(t)\,\gamma(t)\,dt + 1 + \delta(t)\,dt}$$

[13]) Enzykl. math. Wiss. III D 9 (SALKOWSKI), S. 574.

kennt. Dann bekommt (8) die Form

$$\frac{dz}{dt} = -\gamma z^2 + (-\delta + \alpha) z + \beta. \tag{9}$$

Ist eine O.T. bekannt, so erhält man also alle durch zwei Quadraturen[4]). [Ein besonders schöner Beweis dieser bekannten Tatsache findet sich bei LIE-SCHEFFERS[7]), S. 768.]

Satz 6. *Haben alle Scharkugeln (im gewöhnlichen Raum) bzw. Scharkreise (in der Ebene) gleichen Radius und kennt man drei O.T., so lassen sich alle O.T. ohne weitere Quadratur bestimmen und rektifizieren.*

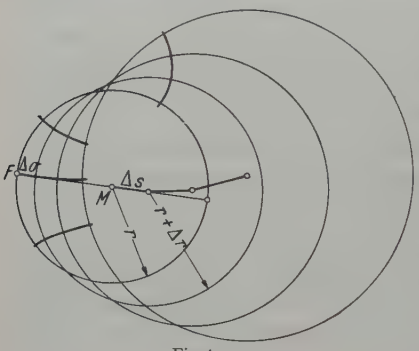

Fig. 1.

Beweis. Aus drei O.T. ergeben sich wegen der Erhaltung des Doppelverhältnisses alle O.T. ohne Quadratur. Damit erfordert auch die Bestimmung des linearen Maßstabs der Abbildung längs einer festen O.T. nur noch eine Differentiation. Nach Formel (4) ist aber für festen Radius der Logarithmus des Abbildungsmaßstabs proportional der Bogenlänge der zugehörigen O.T.

6. Wir wollen jetzt die Differentialgleichung (8) wirklich aufstellen, und zwar wollen wir die komplexe Koordinate z_t (kurz z) dadurch einführen, daß die Scharkugeln durch parallele Normalen auf die Einheitskugel als RIEMANNsche Zahlenkugel abgebildet werden. Die Fixpunkte der infinitesimalen Substitution liegen offenbar in den Endpunkten des zur Tangente an die Mittelpunktskurve im Kugelmittelpunkt parallelen Einheitskugeldurchmessers. Die Substitution ist hyperbolisch, ihr Abbildungsmaßstab in dem Fixpunkt, für den die betreffende O.T. für wachsendes t ins Kugelinnere wandert, setzt sich zusammen aus dem Abbildungsmaßstab der Scharkugeln im entsprechenden Punkt F, nach (4) gleich $1 - \frac{d\sigma}{r}$, und dem Verhältnis der Abbildungsmaßstäbe der Scharkugeln auf die Einheitskugel, also dem Verhältnis $r:(r+dr)$. Der zusammengesetzte Maßstab ist also gleich $\left(1-\frac{d\sigma}{r}\right)\frac{r}{r+dr} = 1 - \frac{d\sigma + dr}{r} = 1 - \frac{ds}{r}$, wobei ds das Bogenelement der Mittelpunktskurve ist (vgl. Fig. 1). In der Figur wurden die (ebene) Mittelpunktskurve durch einen Streckenzug und die O.T. durch Orthogonalkreisbögen zu je zwei benachbarten Scharkugeln approximiert. Man kann beweisen, daß sich diese Approximation beliebig genau machen läßt.

Der Tangentenvektor der Mittelpunktskurve schließe mit der Ebene des Nullmeridians der Einheitskugel den Winkel φ, mit der die Pole verbindenden Achse den Winkel ψ ein. Die Einheitskugel werde vom Nordpol auf die Äquatorebene so stereographisch projiziert, daß der Nullmeridian in die positive reelle Achse übergeht. Dann sind die komplexen Koordinaten unserer

Fixpunkte $-e^{\varphi i} \cdot \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$ und $e^{\varphi i} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}$. Wir erhalten also für die infinitesimale Substitution

$$\frac{z + dz + e^{\varphi i} \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{z + dz - e^{\varphi i} \operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}} = \frac{z + e^{\varphi i} \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{z - e^{\varphi i} \operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}} \left(1 - \frac{ds}{r}\right)$$

oder nach kurzer Rechnung

$$2r \frac{dz}{ds} = (z^2 e^{-\varphi i} - e^{\varphi i}) \sin\psi - 2z \cos\psi. \tag{10}$$

7. Statt dessen kann man, wie Voss[2]) (S. 336) gezeigt hat, eine Riccatische Differentialgleichung aufstellen, die nur von den *natürlichen* Gleichungen

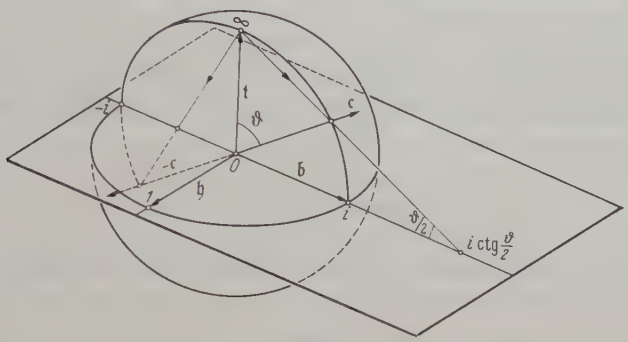

Fig. 2.

der Schar $r = r(s)$, $k = k(s)$, $w = w(s)$ abhängt. k und w bedeuten dabei die Krümmung und Windung der Mittelpunktskurve. Wir wollen diese Vosssche Gleichung mit Hilfe der infinitesimalen Substitution ableiten, um den geometrischen Gehalt der Betrachtung deutlich hervorzuheben. Wir setzen für jeden Wert s des Scharparameters eine komplexe Variable Z_s fest, indem wir auf der Einheitskugel den Endpunkten der Vektoren $\pm \mathfrak{t}(s)$, $\pm \mathfrak{h}(s)$, $\pm \mathfrak{b}(s)$ bzw. die Koordinaten $\begin{cases}\infty \\ 0\end{cases}$, ± 1, $\pm i$ zuordnen, d.h. indem wir die mit dem begleitenden Dreibein der Mittelpunktskurve starr verbundene Zahlenkugel stereographisch vom Endpunkt des Tangentenvektors aus auf die Normalebene projizieren (vgl. Fig. 2).

Die infinitesimale Koordinatentransformation vom System (Z_s) zum System (Z_{s+ds}) läßt sich dann leicht bestimmen. Sie ist nämlich eine Drehung der Einheitskugel, deren Fixpunkte die Enden des Darbouxschen *Drehvektors* $\mathfrak{c} = k\,\mathfrak{b} + w\,\mathfrak{t}$ sind, durch den Winkel $|\mathfrak{c}|\,ds = c\,ds = \sqrt{k^2 + w^2}\,ds$. Die Drehung des begleitenden Dreibeins erfolgt so, daß sie mit der Richtung von $\mathfrak{c}$ eine Rechtsschraube bildet, die *relative* Drehung eines raumfesten Systems zum körperfesten, die ja die Koordinatentransformation definiert, also gerade umgekehrt. In der komplexen Z_s-Ebene haben die Fixpunkte die Koordinaten

$-i\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}$ und $+i\,\mathrm{ctg}\frac{\vartheta}{2}$, wobei $\vartheta = \mathrm{arc\,tg}\frac{k}{w}$ der Winkel zwischen den Vektoren t und c ist. Es wird also

$$\frac{Z_{s+ds}+i\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}}{Z_{s+ds}-i\,\mathrm{ctg}\frac{\vartheta}{2}} = \frac{Z_s+i\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}}{Z_s-i\,\mathrm{ctg}\frac{\vartheta}{2}}\,e^{-ci\,ds}. \tag{11}$$

Wir wollen nun den Schnittpunkt S einer festen O.T. mit der zum Scharparameter s gehörigen Scharkugel durch parallele Normalen auf die Einheitskugel abbilden. Wenn wir die Punkte der Einheitskugel im Koordinatensystem $(Z_{s'})$ durch komplexe Zahlen darstellen, so soll $Z_{s'}(s)$ in *diesem* System den Punkt S darstellen. Die infinitesimale Substitution $Z_s(s)\to Z_{s+ds}(s)$ oder auch $Z_s(s+ds)\to Z_{s+ds}(s+ds)$ haben wir in (11) soeben bestimmt. Wir wollen ihr die Substitution $Z_s(s)\to Z_s(s+ds)$, d.h. die infinitesimale Abbildung benachbarter Scharkugeln (im selben Koordinatensystem) durch die O.T. überlagern. Nach der in Nr. 6 durchgeführten Betrachtung ist diese Abbildung eine reine Dehnung (hyperbolische Substitution) mit den Fixpunkten 0 und ∞ und dem Dehnungsverhältnis $1-\frac{ds}{r}$, d.h. es wird

$$Z_s(s+ds) = Z_s\left(1-\frac{ds}{r}\right). \tag{12}$$

Aus (11) und (12) ergibt sich nun die gesuchte infinitesimale Substitution zwischen $Z_{s+ds}(s+ds)$ und $Z_s(s)$ zu

$$\frac{Z_{s+ds}(s+ds)+i\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}}{Z_{s+ds}(s+ds)-i\,\mathrm{ctg}\frac{\vartheta}{2}} = \frac{Z_s\left(1-\frac{ds}{r}\right)+i\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}}{Z_s\left(1-\frac{ds}{r}\right)-i\,\mathrm{ctg}\frac{\vartheta}{2}}\,(1-i\,c\,ds). \tag{13}$$

Daraus folgt nach einfacher Rechnung, wenn wir die Indizes der Kürze halber wieder weglassen, also z.B. $Z+dZ$ für $Z_{s+ds}(s+ds)$ schreiben:

$$\frac{dZ}{ds}+\frac{Z}{r}-\frac{k}{2}(Z^2+1)+i\,wZ=0. \tag{14}$$

Ersetzt man hierin Z durch $-Z$ und s durch $-s$ (was wir aber nicht tun wollen), so kommt man genau auf die von Voss rechnerisch gefundene Differentialgleichung [[2]), S. 336 unten].

Führt man die Bogenlänge des Tangentenbildes der Mittelpunktskurve als unabhängige Veränderliche $S=\int k\,ds$ ein, so wird aus (14)

$$\frac{dZ}{dS} = \frac{Z^2+1}{2} - Z\left(\frac{1}{kr}+i\frac{w}{k}\right). \tag{14a}$$

Diese Differentialgleichung hängt nur noch von zwei „willkürlichen" Funktionen kr und w/k ab. Die Kugelscharen, für die diese Funktionen übereinstimmen, die also auf dieselbe Differentialgleichung (14a) führen, sind die ROUQUET-DARBOUXschen „similären Scharen" [DARBOUX[3]), Bd. I (1. Aufl.), S. 114; DARBOUX[4]), S. 36].

8. Voss hat in seiner mehrfach zitierten Arbeit [Voss[2]), S. 352] gezeigt, daß die O.T. einer einen Torus einhüllenden Schar gleicher Kugeln sphärische Kurven sind. Wir verallgemeinern diesen Satz wie folgt:

Satz 7. *Hat die gegebene Kugelschar eine gemeinsame Orthogonalkugel $\mathfrak{K}$, so liegt jede O.T. der Schar durch einen Punkt von $\mathfrak{K}$ ganz auf $\mathfrak{K}$. Hat die gegebene Schar zwei gemeinsame Orthogonalkugeln, so sind alle O.T. sphärische Kurven und lassen sich durch eine Quadratur bestimmen.*

Beweis. I. Die erste Behauptung ergibt sich unmittelbar, wenn man die Kugel $\mathfrak{K}$ durch eine Inversion in eine Ebene überführt.

II. Die zweite Behauptung folgt aus der ersten, da jede Scharkugel mit $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ das ganze von ihnen bestimmte Kugelbüschel orthogonal schneidet.

III. Schneiden sich die beiden Orthogonalkugeln in einem Kreis, so stellt dieser zwei bekannte O.T. dar, d.h. eine Quadratur genügt zur Bestimmung aller O.T. [Lie-Scheffers[7]), S. 770]. Berühren sich die Kugeln in einem Punkt, so lassen sich die Scharkugeln durch Inversion in Berührebenen eines Zylinders verwandeln. Die Ermittlung ihrer O.T. erfordert also wieder nur eine Quadratur, nämlich die Abwicklung des Zylinders. Schneiden sich aber die beiden Orthogonalkugeln nicht, so gehen alle Scharkugeln durch die beiden gemeinsamen Punkte aller Orthogonalkreise zu den beiden Kugeln. Diese Punkte sind in Übereinstimmung mit § 1 als zwei bekannte ausgeartete O.T. anzusehen, woraus wieder die Behauptung folgt. (Nach einer geeigneten Inversion wären die Scharkugeln Berührebenen eines Kegels; seine Abwicklung enthält die noch nötige Quadratur.)

Satz 7a. *Ist eine O.T. eine sphärische Kurve, so jede O.T. durch einen auf einer sie enthaltenden Kugel liegenden Punkt. Ist also eine O.T. ein Kreis, so sind alle O.T. sphärische Kurven.*

Denn jede die O.T. enthaltende Scharkugel ist gemeinsame Orthogonalkugel aller Scharkugeln. Ebenso folgt

Satz 7b. *Sind zwei O.T. einer Kugelschar sphärische Kurven auf verschiedenen Kugeln, so sind alle O.T. sphärische Kurven und lassen sich durch eine Quadratur bestimmen.*

9. Man kann den Fall einer ebenen Mittelpunktskurve (oder den darin durch eine Inversion überführbaren der Schar mit einer gemeinsamen Orthogonalkugel) als Poincarésches Modell einer nichteuklidischen Ebenenschar deuten und erhält so zwei im euklidischen Fall elementare Sätze:

Die O.T. einer nichteuklidischen Ebenenschar bzw. der Geraden auf einer nichteuklidischen Regelfläche bilden die einzelnen Scharebenen bzw. -geraden nichteuklidisch kongruent aufeinander ab.

Hat eine nichteuklidische Geradenkongruenz eine Orthogonalfläche (im wirklichen nichteuklidischen Raum, also außer der doppelt zählenden Fundamentalkugel), so hat sie unendlich viele, und je zwei Orthogonalflächen schneiden aus allen ihren Geraden gleiche Strecken aus.

Das dürften keine neuen Erkenntnisse sein; ihre Einordnung in unseren Zusammenhang ist aber vielleicht doch nicht ohne Interesse.

10. Wir wollen noch ein Verfahren zur Ermittlung der O.T. skizzieren für den Fall, daß die Kugelschar aus einer Kugel durch eine einfach kontinuierliche Gruppe $\mathfrak{G}$ konformer Raumtransformationen hervorgeht. Wir nennen eine solche Schar eine LIEsche Kugelschar. Wir erhalten z.B. LIEsche Scharen (vom trivialen Fall des Kugelbüschels abgesehen), wenn die Einhüllende der Kugelschar eine DUPINsche Zyklide oder eine Schraubenröhrenfläche ist oder wenn die Mittelpunktskurve Loxodrome eines Kreiskegels ist und der Kugelradius dem Abstand des Kugelmittelpunkts von der Spitze proportional ist. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ sei isomorph auf die additive Gruppe der reellen Variabeln τ bezogen; τ heiße dann ein *Gruppenparameter*. Es gibt im allgemeinen zwei Bahnkurven der Gruppe, die gleichzeitig O.T. sind. Denn bildet man eine Scharkugel $\mathfrak{K}_1$ auf eine zweite $\mathfrak{K}_2$ durch die Bahnkurven und rückwärts die Kugel $\mathfrak{K}_2$ auf $\mathfrak{K}_1$ durch die O.T. ab, so hat die zusammengesetzte kreistreue Abbildung im allgemeinen zwei Fixpunkte. Das gilt auch für $\mathfrak{K}_2 \to \mathfrak{K}_1$, d.h. es gibt im allgemeinen zwei Bahnkurvenelemente, die $\mathfrak{K}_1$ senkrecht schneiden und die daher einer Bahnkurve angehören, die gleichzeitig O.T. ist. Ordnen wir nun auf einer Scharkugel $\mathfrak{K}_0$ ihren Schnittpunkten mit den beiden orthogonalen Bahnkurven die komplexen Koordinaten 0 und ∞ zu und legen im übrigen die Koordinaten auf den Scharflächen so fest, daß die Bahnkurven die Gleichungen $Z = \text{const}$ haben, so wird die von den O.T. erzeugte infinitesimale Substitution eine von τ unabhängige Drehstreckung, d.h. wir erhalten eine Differentialgleichung

$$\frac{dZ}{d\tau} = \gamma Z$$

oder

$$Z(\tau) = Z(0)\, e^{\gamma \tau}, \qquad \gamma = \text{const.} \tag{15}$$

In dieser einfachen Form lassen sich also die O.T. einer LIEschen Schar darstellen.

11. *Beispiele.*

a) Im Fall der geradlinig bewegten Kugel sind alle O.T. außer der Mittelpunktsbahn $\mathfrak{M}$ kongruente Tractricen. Ein Gruppenparameter τ ist die Streckenlänge s auf $\mathfrak{M}$. Wir haben also $Z(s) = e^{\gamma s} Z(0)$. γ erhalten wir aus dem linearen Abbildungsmaßstab m für $Z = 0$ (d.h. längs der Geraden $\mathfrak{M}$), denn nach (4) ist $m(s, 0) = e^{-\frac{s}{r}}$. Es wird also einfach

$$Z(s) = Z(0)\, e^{-\frac{s}{r}}. \tag{15a}$$

b) Ganz entsprechend ergibt sich im Fall des Torus als Einhüllender, wenn R der Radius und φ der Polarwinkel der Mittelpunktsbahn, $r < R$ der feste Scharkugelradius ist [für den Fall $r \geqq R$ vgl. d)], weil der Kreis mit Radius $\sqrt{R^2 - r^2}$ orthogonale Bahnkurve ist:

$$Z(\varphi) = Z(0)\, e^{-\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r}\varphi}. \tag{15b}$$

c) Im Fall des Kreiskegels mit dem Öffnungswinkel 2α als Einhüllende sei σ der kürzeste Abstand eines Scharkugelpunktes von der Kegelspitze Dann ist $\sigma = r\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)$. $\tau = \log\sigma$ kann als Gruppenparameter gewählt werden. Aus Formel (4) folgt

$$m(\sigma, 1) = e^{-\int_1^\sigma \frac{d\sigma}{r}} = \sigma^{-\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)}.$$

$e^{\nu\tau}$ ist nun gleich dem Verhältnis des Abbildungsmaßstabes durch die O.T. zum Abbildungsmaßstab durch die Bahnkurven. Daraus folgt

$$e^{\nu\tau} = \sigma^\nu = \sigma^{-\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)} : \sigma = \sigma^{-\frac{1}{\sin\alpha}}, \text{ d.h.}$$

(15c)
$$Z(\sigma) = Z(1) \cdot \sigma^{-\frac{1}{\sin\alpha}}.$$

Für $\alpha \to 0$ kann man daraus durch Grenzübergang wieder (15a) gewinnen.

d) Im Fall der Schraubenröhrenfläche als Einhüllender ist die direkte Durchführung unseres Ansatzes nicht so einfach. Wir kommen leichter zum Ziel, wenn wir die oben aufgestellte Vosssche Gl. (14) (in der wir z statt Z schreiben) integrieren. Nach der Substitution $\frac{1}{rk} + i\frac{w}{k} = \mathfrak{Cof}\,\lambda$ ergibt sich

$$k(s - s_0) = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\lambda} \log \frac{z - e^{-\lambda}}{z + e^{\lambda}}$$

oder nach der Substitution $Z = \frac{z - e^{-\lambda}}{z + e^{\lambda}}$ (s ist Gruppenparameter)

(15d)
$$Z(s) = Z(0)\, e^{ks\,\mathfrak{Sin}\,\lambda} = Z(0)\, e^{\pm\frac{s}{r}\sqrt{(1 + iwr)^2 - r^2k^2}}.$$

Im Fall $w = 0$, $k = 1/R$, $s = R\varphi$ kommen wir auf den Fall der Torusschar zurück. Interessant ist hier der Fall $r > R$, in dem die durch (15d) vermittelte Abbildung elliptisch, d.h. eine reine Drehung wird. Tatsächlich gehen in diesem Fall alle Scharkugeln durch zwei zur Ebene der Mittelpunktskurve symmetrisch gelegene Punkte und unsere Kugelschar geht nach einer Inversion in die Schar der Berührebenen eines Kreiskegels über (im Fall $R = r$ eines Kreiszylinders).

e) Die Mittelpunktskurve sei Loxodrome eines Kegels und es sei

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{s}, \qquad k = \frac{\beta}{s}, \qquad w = \frac{\gamma}{s}; \qquad \alpha, \beta, \gamma = \text{const.}$$

Aus (14) wird dann mit $\tau = \log s$

$$2\frac{dz}{d\tau} = \beta(z^2 + 1) - (\alpha + i\gamma)z.$$

Nach der Substitution $\alpha + i\gamma = \beta \operatorname{Cof} \lambda$ wird

$$\beta(\tau - \tau_0) = \frac{1}{\operatorname{Sin} \lambda} \log \frac{z - e^{-\lambda}}{z + e^{\lambda}}.$$

Führt man Z wie unter d) ein, so ergibt sich

$$Z(s) = Z(1)\, s^{\pm \sqrt{(\alpha + i\gamma)^2 - \beta^2}}. \tag{15e}$$

§ 4. Geschlossene Orthogonaltrajektorien.

12. Es gilt

Satz 8[8]). *Führt man auf zwei Scharkugeln $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ je eine komplexe Koordinate Z ein, so verbinden entweder genau eine oder genau zwei oder alle O.T. auf beiden Kugeln gleiche Werte von Z. Insbesondere: Zu einer geschlossenen Kugelschar (d.h. einer Schar, deren Mittelpunktskoordinaten und deren Radius periodische Funktionen von t mit gleicher Periode sind) sind entweder genau eine oder genau zwei oder alle O.T. geschlossen.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar daraus, daß durch die O.T. eine lineare Abbildung der komplexen Z-Ebene auf sich vermittelt wird, die entweder einen oder zwei Fixpunkte hat oder die Identität ist.

Die angegebenen Fälle können wirklich alle vorkommen. Die identische Abbildung tritt für Kugelbüschel ein. Genau eine geschlossene O.T. hat man, falls alle Scharkugeln eine feste Gerade in einem Punkt berühren, ohne ein Büschel zu bilden. Dann geht die Schar nämlich durch Inversion in die Berührebenen eines Zylinders über. Im Fall der um einen exzentrischen Punkt gedrehten Kugel [die Hüllfläche ist ein Torus oder eine Spindelzyklide, s. Nr. 11, b) und d)] haben wir für $r < R$ eine hyperbolische, für $r > R$ eine elliptische Substitution mit genau zwei Fixpunkten. Daß die Fälle der Identität und der zusammenfallenden Fixpunkte besondere Ausnahmefälle sind, erkennt man (mit $\sigma =$ Bogenlänge der O.T.) an.

Satz 9. *Wenn eine geschlossene O.T. existiert, für die das Integral $\int \frac{d\sigma}{r}$ nicht verschwindet (das ist z.B. der Fall, wenn die O.T. singularitätenfrei ist und die Schar keine Ebenen enthält), so existiert noch eine zweite geschlossene O.T., für die das Integral $\int \frac{d\sigma}{r}$ von gleicher Größe, aber entgegengesetztem Vorzeichen wie für die erste ist. Dabei ist $d\sigma$ positiv zu zählen, wenn die Fortschreitungsrichtung der O.T. ins Innere der Scharkugeln weist, sonst negativ. Bei fortgesetztem Durchlaufen der Schar in einer Richtung nähern sich alle nichtgeschlossenen O.T. asymptotisch einer geschlossenen an, beim Durchlaufen in anderer Richtung der anderen.*

Beweis. I. Wenn $\int \frac{d\sigma}{r} \neq 0$ ist, so ist nach (4) der Abbildungsmaßstab beim Durchlaufen der geschlossenen O.T. von 1 verschieden, d.h. die Abbildung der Kugel auf sich kann weder identisch noch elliptisch noch parabolisch sein; es existiert also genau ein zweiter Fixpunkt, d.h. eine zweite geschlossene O.T.

II. In den beiden Fixpunkten sind die Abbildungsmaßstäbe reziprok, daher die zugehörigen Integrale $\int \frac{d\sigma}{r}$ entgegengesetzt gleich.

III. Die Behauptung über das asymptotische Verhalten der O.T. folgt unmittelbar daraus, daß der Abbildungsmaßstab nicht 1 ist. Ein Sonderfall ist

Satz 9a. *Wenn eine geschlossene O.T. einer Schar von Kugeln mit festem Radius eine von 0 verschiedene Länge hat, so gibt es eine zweite geschlossene O.T. (und nur eine) und diese hat entgegengesetzt gleiche Länge.*

Satz 9b. *Gegeben sei eine Kugelschar mit festem Radius. Wenn zwei O.T. zwei Punkte P_1, Q_1 einer Scharkugel $\mathfrak{K}_1$ mit zwei Punkten P_2, Q_2 einer zweiten Scharkugel $\mathfrak{K}_2$ verbinden und wenn die sphärischen Entfernungen P_1Q_1 und P_2Q_2 gleich sind, so sind die O.T.-Bögen P_1P_2 und Q_1Q_2 entgegengesetzt gleich lang.*

Beweis. Wir bilden $\mathfrak{K}_1$ zunächst mittels der O.T. auf $\mathfrak{K}_2$ ab und führen dann $\mathfrak{K}_2$ durch eine Bewegung so in $\mathfrak{K}_1$ über, daß P_2 nach P_1, Q_2 nach Q_1 gelangt. Dann sind P_1 und Q_1 Fixpunkte der zusammengesetzten Abbildung. Die Logarithmen der Abbildungsmaßstäbe sind nach (4) den entsprechenden Bogenlängen proportional, andererseits aber entgegengesetzt gleich, woraus die Behauptung folgt.

13. Bei der bereits behandelten Torusschar (Nr. 11b) fallen die beiden geschlossenen O.T. zusammen. Das ist stets der Fall, wenn ein Kreis O.T. ist, denn ein solcher schneidet jede Scharkugel zweimal senkrecht. Im allgemeinen ist diese Erscheinung jedoch nicht zu erwarten. Als Einzeltatsache beweisen wir dazu

Satz 10. *Eine ebene Eilinie mit genau vier Scheiteln kann nicht doppelte O.T. einer geschlossenen Kreis-(Kugel-)schar sein.*

Beweis. I. Zu jedem die Eilinie $\mathfrak{E}$ in zwei Punkten P, Q rechtwinklig schneidenden Kreis gibt es einen $\mathfrak{E}$ in P und Q berührenden Kreis $\mathfrak{K}$[8]).

II. $\mathfrak{K}$ kann mit $\mathfrak{E}$ außer P und Q keine Punkte gemein haben, denn sonst hätte $\mathfrak{E}$ nach einem Satz von Blaschke [10] S. 49] mehr als vier Scheitel. Daher liegt auf der Kurve $\mathfrak{E}$ entweder kein äußerer oder kein innerer Punkt von $\mathfrak{K}$.

III. Zu jedem Punkt P gibt es daher im allgemeinen genau zwei Kreise, die $\mathfrak{E}$ in P und noch in einem Punkt Q berühren, nämlich den größten in P berührenden, ganz in der abgeschlossenen Eifläche enthaltenen und den kleinsten in P berührenden, die Eifläche ganz überdeckenden Kreis. Nur falls P einer der vier Scheitel ist, fällt für einen der beiden Kreise Q mit P zusammen.

IV. Bewegt sich P stetig auf dem Umfang von $\mathfrak{E}$, so auch Q. Dabei bewegen sich P und Q niemals in gleicher Umlaufsrichtung. Man zeigt das leicht auf Grund der Tatsache, daß die Krümmungen von $\mathfrak{E}$ in P und Q entweder beide kleiner oder beide größer als die Krümmung von $\mathfrak{K}$ sind.

V. Bewegt sich also P auf Q zu, so Q auf P, d.h. beide Punkte müssen schließlich zusammenrücken; unsere Schar würde also im Widerspruch zu

unserer Definition der Kreisschar einen in einen Punkt ausgearteten Kreis enthalten, womit Satz 10 bewiesen ist.

Zu einer nichtsphärischen Raumkurve wird man im allgemeinen zu gegebenem Punkt P nicht einmal einen zweiten Punkt Q finden können, so daß es eine die Kurve in P und Q senkrecht schneidende Kugel gibt.

14. Satz 9 setzt noch die Kenntnis von Eigenschaften einer geschlossenen O.T. voraus. Wir werden jetzt einen Satz beweisen, der ohne solche Voraussetzungen auskommt und nicht auf Kugelscharen beschränkt ist. Die Existenz *mindestens* einer geschlossenen O.T. einer geschlossenen Schar von Flächen gerader Dimension vom Zusammenhang der Kugel folgt übrigens schon aus einem Satz von BROUWER[14]), wonach jede topologische Abbildung der $2m$-dimensionalen Kugel auf sich, bei der die Orientierung erhalten bleibt, mindestens einen Fixpunkt hat. Darüber hinaus gilt

Satz 11. Vor. I: *Eine geschlossene Schar geschlossener Eiflächen habe überall stetig differenzierbare Normalenrichtungen (d.h. stetige Krümmungen) und positives Krümmungsmaß.*

Vor. II: *Die Einhüllende der Schar habe überall eine stetig vom Ort abhängige Normalenrichtung und enthalte keinen Punkt innerhalb einer Scharfläche. Es gebe keinen Punkt, der allen Scharflächen eines ganzen Zeitintervalls angehört.*

Behauptung. *Die Schar hat genau zwei geschlossene O.T. Alle nichtgeschlossenen O.T. nähern sich bei fortgesetztem Durchlaufen der Schar in einer beliebigen Richtung exponentiell asymptotisch einer der beiden geschlossenen O.T. an. Die beiden geschlossenen O.T. sind singularitätenfrei, alle anderen O.T. haben genau eine Spitze.*

Beweis. I. Wenn eine O.T. (für wachsendes t) eine Scharfläche von außen nach innen durchsetzt, so durchsetzt sie auch alle späteren Scharflächen von außen nach innen; denn sonst müßte sich entweder längs der O.T. das Vorzeichen der Flächenkrümmung umkehren, was Vor. I widerspricht; oder die O.T. müßte eine Spitze haben, d.h. die Einhüllende $\mathfrak{H}$ treffen, was Vor. II widerspricht, da dann $\mathfrak{H}$ doch einen Punkt innerhalb einer Scharfläche enthielte. Daraus folgt, daß jede O.T. höchstens eine Spitze hat.

II. Wir zerlegen die Scharfläche $\mathfrak{F}_0$ in zwei Gebiete $\mathfrak{G}_i$ und $\mathfrak{G}_a$ und die Restmenge $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{G}_i$ bzw. $\mathfrak{G}_a$ bestehe aus den Punkten, in denen die O.T. nach innen bzw. außen gerichtet sind. In den Punkten von $\mathfrak{R}$ haben die O.T. dann Spitzen. Bei einmaligem Durchlaufen der Schar längs der O.T. in positiver Richtung wird $\mathfrak{G}_i$ einschließlich $\mathfrak{R}$ auf ein echtes Teilgebiet abgebildet, das keinen Punkt der Restmenge $\mathfrak{R}$ mehr enthält.

III. Die abs. Beträge der Normalkrümmungen aller Linienelemente auf Scharflächen haben als stetige Funktionen im (vierdimensionalen) beschränkten abgeschlossenen Bereich ein positives Minimum $\mathfrak{N}_0$. Die Bogenlängen der von $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_i + \mathfrak{R}$ ausgehenden O.T. bis zum Schnitt mit $\mathfrak{F}_0$ nach einem vollen

[14]) BROUWER, L. E. J.: Über eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich. Math. Ann. **69**, 176—180, insbes. 180 (1910).

Umlauf haben eine positive untere Grenze l_0. Denn $\oint |ds|$ ist als Funktion des Ortes auf der ganzen Scharfläche $\mathfrak{F}_0$ positiv und stetig; weil ds längs einer in $\mathfrak{G}$ beginnenden O.T. stets positiv bleibt, folgt $l_0 \geqq \operatorname{Min}_{\mathfrak{F}_0} \oint |ds| > 0$. Daher ist der lineare Abbildungsmaßstab bei einem Umlauf für $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_i + \mathfrak{R}$ nach (4)

$$m \leq e^{-l_0 \mathfrak{N}_0} < 1. \tag{16}$$

Daraus folgt, daß das Bild $\mathfrak{G}_1$ des Bereichs $\mathfrak{G}$ kleineren Flächeninhalt hat als $\mathfrak{G}$ selbst. Das Bild $\mathfrak{G}_2$ von $\mathfrak{G}_1$ liegt ganz im Bild von $\mathfrak{G}$, d.h. in $\mathfrak{G}_1$ usw. Wir erhalten so eine Folge von ineinander geschachtelten Bereichen $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{G}_n \supset \ldots$, die wegen (16) gegen einen Punkt konvergieren müssen, den wir C_i nennen. Die O.T. durch C_i ist dann geschlossen und singularitätenfrei.

IV. Ebenso wird der Bereich $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{R} + \mathfrak{G}_a$ beim wiederholten Durchlaufen der Schar in negativer Richtung asymptotisch auf einen Punkt C_a von $\mathfrak{G}_a$ abgebildet. Die O.T. durch C_a ist wieder geschlossen und singularitätenfrei.

V. Daraus folgt, daß jede durch einen von C_a verschiedenen Punkt des Gebietes $\mathfrak{G}_a$ gehende O.T. beim wiederholten Durchlaufen der Schar in *positiver* Richtung schließlich in das Gebiet $\mathfrak{G}_i$ eintreten, also nach III. sich asymptotisch dem Punkt C_i annähern muß. Der Übergang von $\mathfrak{G}_a$ nach $\mathfrak{G}_i$ ist aber nur möglich, wenn die O.T. irgendwo eine Spitze hat. Entsprechendes gilt für die andere Richtung.

Der damit bewiesene Satz gilt mit seinem Beweis für beliebige Dimensionszahl der Scharflächen, insbesondere auch für Kurvenscharen.

15. Wir kommen nochmals auf die Kugelscharen zurück und verallgemeinern Satz 8 auf den m-dimensionalen Fall.

Satz 12. *Die geschlossenen O.T. einer geschlossenen Schar n-dimensionaler Kugeln schneiden aus jeder Scharkugel eine Punktmenge aus, die sich als Durchschnitt von Hyperkugeln darstellen läßt. Diese Menge enthält also entweder keinen (nach dem erwähnten* Brouwerschen *Satz nur möglich für ungerades n) oder einen oder zwei oder unendlich viele — einen Kreis oder eine Kugelfläche einer der Dimensionen $2, 3, \ldots, n-2$, n bildende — Punkte.*

Beweis. I. Man zeigt leicht durch Induktion, daß eine Kugelverwandtschaft, die $k+1 \geqq 3$ nicht auf einer $(k-2)$-dimensionalen Kugel (abgekürzt S_{k-2}) liegende Punkte fest läßt, die durch die $k+1$ gegebenen Punkte bestimmte S_{k-1} punktweise in sich überführt. (Unter einer 0-dimensionalen Kugel seien dabei 2 Punkte verstanden.)

Der Satz sei nämlich für k auf keiner S_{k-3} liegende Punkte bewiesen. (Für $k=3$ und $k=4$ ist er bekanntlich richtig.) Dann liegen die ersten k von $k+1$ gegebenen, auf keiner S_{k-2} liegenden Punkten auf keiner S_{k-3}. Wenn eine Kugelverwandtschaft also die gegebenen Punkte $P_1, \ldots, P_k, P_{k+1}$ einzeln fest läßt, so läßt sie nach der Induktionsvoraussetzung die von $P_1, \ldots, P_k$ bestimmte S_{k-2} punktweise fest. Q sei ein nicht auf dieser gelegener Punkt der durch $P_1, \ldots, P_{k+1}$ bestimmten S_{k-1}.

Je zwei Kreise durch Q, die die S_{k-2} durch $P_1, \ldots, P_k$ senkrecht schneiden, gehen punktweise in sich über oder sie werden an der S_{k-2} gespiegelt. Der letztere Fall ist aber ausgeschlossen, weil sonst auch P_{k+1} gespiegelt werden müßte, was nicht der Fall ist. Unsere Kugelverwandtschaft bildet daher die S_{k-1} durch $P_1, \ldots, P_{k+1}$ identisch ab, w. z. b. w.

II. Die Fixpunkte der durch die geschlossenen O.T. vermittelten Abbildung bilden also auf der Scharkugel, falls es mehr als einen gibt, eine S_m mit $0 \leqq m \leqq n$. Der Fall $m = n-1$ ist dabei ausgeschlossen, denn dann müßte, weil die Orientierung erhalten bleibt, die Abbildung die Identität sein.

München 19, Mettinghstr. 5.

(Eingegangen am 16. April 1952.)

Scheibe, E.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 65—74 (1952)

Über einen verallgemeinerten affinen Zusammenhang.

Von
Erhard Scheibe.

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortführung der von Lyra [4] begonnenen Theorie des sog. affinen Zusammenhanges i. w. S. (im weiteren Sinne) und setzt deren Kenntnis voraus. Es werden einige Eigenschaften des zum affinen Zusammenhang i. w. S. gehörigen Krümmungstensors hergeleitet, danach der Standpunkt der Richtungsübertragung und der allgemeine projektive Standpunkt eingenommen, um schließlich zu einem Satz der metrischen Geometrie zu gelangen, der an Stelle des von Weyl als Fundamentalsatz der Infinitesimalgeometrie bezeichneten Satzes tritt.

Zu Beginn machen wir eine Bemerkung über die Bedeutung der von Lyra rein formal eingeführten Eichung im geometrisch strukturlosen Raum. Bei Zugrundelegung einer axiomatischen Definition des *n-dimensionalen analytischen Raumes*, wie man sie etwa bei Chevalley [3], Chapter III: Manifolds, findet, zeigt sich folgendes: Während der gewöhnliche Tensorbegriff im n-dimensionalen Raum auf der Einführung der vom Koordinatensystem im Punkte P abhängigen Basis $L_i(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_P$ $(1 \leq i \leq n)$ (Chevalley [3], S. 78) im Tangentialvektorraum in P beruht, gelangt man zu dem erweiterten Tensorbegriff durch Einführung der Basis $\frac{1}{x^0} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i}$, wobei x^0 die von Lyra eingeführte noch willkürliche *Eichfunktion* ist. Den Raum in P auf ein *Bezugssystem* beziehen heißt demnach: 1. in P ein Koordinatensystem einführen, 2. die Eichfunktion x^0 willkürlich vorgeben und im Tangentialvektorraum in P die von x^0 und vom Koordinatensystem abhängige Basis $L_i^*(f) = \frac{1}{x^0} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i}$ einführen. Der Übergang zu einem neuen Bezugssystem hat dann im Tangentialvektorraum in P die durch

$$M_i^*(f) = \sum_k \lambda^{-1} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} L_k^*(f); \qquad \lambda = \frac{\bar{x}^0}{x^0} \tag{1}$$

gegebene Basistransformation zur Folge, wobei λ das Lyrasche *Eichverhältnis* ist. Aus (1) errechnen sich dann ohne weiteres die Transformationsformeln für die Komponenten eines Tensors.

Der Krümmungstensor des affinen Zusammenhanges i. w. S. Nach Lyra sind die Komponenten eines affinen Zusammenhanges i. w. S. in einem beliebigen Bezugssystem von der Form

$$\tilde{\Gamma}_{k\alpha}^i = \Gamma_{k\alpha}^i - \tfrac{1}{2} \delta_k^i \varphi_\alpha; \qquad \Gamma_{k\alpha}^i = \Gamma_{\alpha k}^i. \tag{2}$$

Die ursprünglich von WEYL betrachteten (symmetrischen) Übertragungen erhält man aus (2) als Spezialfall:

$$\varphi_\alpha = \overset{\circ}{\varphi}_\alpha; \qquad \overset{\circ}{\varphi}_\alpha = \frac{1}{x^0} \cdot \frac{\partial \lg (x^0)^2}{\partial x^\alpha}. \tag{3}$$

(3) sind alle Übertragungen (2), die bei einer Eichung $x^0 = \text{const.}$ symmetrisch werden. Die Gesamtheit aller Übertragungen, die in irgendeinem Bezugssystem symmetrisch werden, liegen in der invarianten Form

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{x^0} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \tag{4}$$

vor, mit beliebiger, vom Bezugssystem abhängiger Funktion φ [1]. Der zu (2) gehörige Krümmungstensor lautet in Komponenten

$$K^i_{k\alpha\beta} = \frac{1}{(x^0)^2} \cdot \left\{ \frac{\partial (x^0 \widetilde{\Gamma}^i_{k\beta})}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial (x^0 \widetilde{\Gamma}^i_{k\alpha})}{\partial x^\beta} + x^0 \widetilde{\Gamma}^i_{\varrho\alpha}\, x^0 \widetilde{\Gamma}^\varrho_{k\beta} - x^0 \widetilde{\Gamma}^i_{\varrho\beta}\, x^0 \widetilde{\Gamma}^\varrho_{k\alpha} \right\}. \tag{5}$$

Er gestattet die bemerkenswerte Zerlegung

$$K^i_{k\alpha\beta} = R^i_{k\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\, \delta^i_k \Phi_{\alpha\beta} \tag{6}$$

in die beiden Tensoren

$$R^i_{k\alpha\beta} = \frac{1}{x^0} \cdot \frac{\partial \Gamma^i_{k\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{x^0} \cdot \frac{\partial \Gamma^i_{k\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^i_{\varrho\alpha} \Gamma^\varrho_{k\beta} - \Gamma^i_{\varrho\beta} \Gamma^\varrho_{k\alpha} + \frac{1}{2} (\overset{\circ}{\varphi}_\alpha \Gamma^i_{k\beta} - \overset{\circ}{\varphi}_\beta \Gamma^i_{k\alpha}) \tag{7}$$

$$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{x^0} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^\beta} \right) + \frac{1}{2} (\overset{\circ}{\varphi}_\alpha \varphi_\beta - \overset{\circ}{\varphi}_\beta \varphi_\alpha), \tag{8}$$

von denen (7) nur von den $\Gamma^i_{k\alpha}$, (8) nur von den φ_α des affinen Zusammenhanges i. w. S. abhängt. (7) hat die gewöhnlichen Symmetrieeigenschaften

$$R^i_{k\alpha\beta} + R^i_{k\beta\alpha} = 0 \tag{9}$$

$$R^i_{k\alpha\beta} + R^i_{\alpha\beta k} + R^i_{\beta k\alpha} = 0, \tag{10}$$

während für (8) die Schiefsymmetrie

$$\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\alpha} = 0 \tag{11}$$

gilt. Diese Eigenschaften führen zu

Satz 1. *Es sei $n > 2$. Sind in einem Gebiet G eines n-dimensionalen Raumes zwei Übertragungen* (2) *gegeben und stimmen im Punkte $P \in G$ die zugehörigen Krümmungstensoren* (5) *überein, so auch die entsprechenden Tensoren* (7) *und* (8). *Für $n > 2$ bestimmt daher* (5) *seine beiden Anteile* (7) *und* (8) *eindeutig.*

Beweis. Setzen wir die Differenzen einander entsprechender Tensoren (5), (7) und (8) in Klammern, so gilt wegen (6): $[K^i_{k\alpha\beta}] = [R^i_{k\alpha\beta}] - \frac{1}{2}\, \delta^i_k [\Phi_{\alpha\beta}]$. Die $[R^i_{k\alpha\beta}]$ haben aber ebenfalls die Symmetrieeigenschaften (9), (10), die $[\Phi_{\alpha\beta}]$ (11).

[1] Diese Bemerkungen mögen zugleich als Berichtigung des in LYRA [4] auf S. 56 oben Gesagten dienen.

Ist also in P $[K^i_{k\alpha\beta}]=0$, so $[R^i_{k\alpha\beta}]=\frac{1}{2}\delta^i_k[\Phi_{\alpha\beta}]$ und daher

$$\delta^i_k[\Phi_{\alpha\beta}]+\delta^i_\alpha[\Phi_{\beta k}]+\delta^i_\beta[\Phi_{k\alpha}]=0.$$

Verjüngung nach i und k liefert $(n-2)[\Phi_{\alpha\beta}]=0$, also für $n>2$ $[\Phi_{\alpha\beta}]=0$, also auch $[R^i_{k\alpha\beta}]=0$, w. z. b. w. — Für $n=2$ ist der Satz nicht allgemein richtig, gilt aber z.B. in der RIEMANNschen Geometrie für kongruente symmetrische Übertragungen.

Satz 2. *$K^i_{k\alpha\beta}$ hat die Symmetrieeigenschaft* (9). (10) *erfüllt $K^i_{k\alpha\beta}$ für $n=2$ immer, für $n>2$ genau dann, wenn eine symmetrische Übertragung* (4) *vorliegt.*

Beweis. Für $n=2$ ist (10) eine Folge von (9) allein, das trivialerweise für alle n erfüllt ist. — Eine Charakterisierung der symmetrischen Übertragungen (4) ist offenbar

$$\Phi_{\alpha\beta}=0. \tag{12}$$

Aus (12) folgt aber $K^i_{k\alpha\beta}=R^i_{k\alpha\beta}$, so daß (10) auch für $K^i_{k\alpha\beta}$ gilt. Ist umgekehrt letzteres der Fall, so folgt daraus sofort

$$R^i_{k\alpha\beta}+R^i_{\alpha\beta k}+R^i_{\beta k\alpha}=\tfrac{1}{2}(\delta^i_k\Phi_{\alpha\beta}+\delta^i_\alpha\Phi_{\beta k}+\delta^i_\beta\Phi_{k\alpha}),$$

also wegen (10) nach Verjüngung wieder $\Phi_{\alpha\beta}=0$ für $n>2$.

Satz 3. *Bildet man nach* LYRA [4], *Formel* (11) *die kovarianten Ableitungen $\nabla_\gamma K^i_{k\alpha\beta}$ des Krümmungstensors, so gelten die* BIANCHIschen *Identitäten*

$$\nabla_\alpha K^i_{k\beta\gamma}+\nabla_\beta K^i_{k\gamma\alpha}+\nabla_\gamma K^i_{k\alpha\beta}=0. \tag{13}$$

Es gilt sogar

$$\nabla_\alpha R^i_{k\beta\gamma}+\nabla_\beta R^i_{k\gamma\alpha}+\nabla_\gamma R^i_{k\alpha\beta}=0 \tag{14}$$

$$\nabla_\alpha \Phi_{\beta\gamma}+\nabla_\beta \Phi_{\gamma\alpha}+\nabla_\gamma \Phi_{\alpha\beta}=0. \tag{15}$$

Beweis. Man führe im Punkte P ein geodätisches Bezugssystem ein, in dem dann jedenfalls $\varphi_\alpha=0$ in P ist. Da gelten wie gewöhnlich die Beziehungen (14) und (15). Da es sich auf den linken Seiten um Tensoren handelt, gelten die Formeln allgemein. (13) ist wegen (6) eine Folge von (14), (15). — Ein im Gebiet G mit einem affinen Zusammenhang i. w. S. ausgestatteter Raum heißt in G eben, wenn es ein Bezugssystem gibt, in welchem identisch in G die $\tilde{\Gamma}^i_{k\alpha}$ verschwinden. Es gilt

Satz 4. *Notwendig und hinreichend für die Ebenheit des Raumes in G ist für $n>2$ das identische Verschwinden von* (5), *für $n=2$ das identische Verschwinden von* (7) *und* (8).

Beweis. Für $n>2$ folgt aus $K^i_{k\alpha\beta}=0$ wegen Satz 1 sofort $R^i_{k\alpha\beta}=0$ und $\Phi_{\alpha\beta}=0$. Durch alleinige Transformation des Koordinatensystems erreicht man daher $\Gamma^i_{k\alpha}=0$ und danach durch alleinige Umeichung $\varphi_\alpha=0$.

Die Richtungsübertragung[2]). Die geometrische Bedeutung des affinen Zusammenhanges i. w. S. wird vom Standpunkt der Richtungsübertragung noch klarer. Unter einer *Richtung im Punkte P* eines Raumes verstehen wir eine Klasse von Tangentialvektoren, die aus einem von ihnen durch Multiplikation mit allen positiven Zahlen hervorgeht. Jede Vektorübertragung liefert damit zugleich eine Richtungsübertragung, jedoch ist der letztere Begriff allgemeiner. Nennen wir nämlich zwei beliebige lineare Übertragungen projektiv äquivalent i. e. S. (im engeren Sinne), wenn für ihre Komponenten $\widehat{\Gamma}^i_{k\alpha}$ und $\Gamma^i_{k\alpha}$ die (invariante) Beziehung

$$[\Gamma^i_{k\alpha}] =: \widehat{\Gamma}^i_{k\alpha} - \Gamma^i_{k\alpha} = \delta^i_k \psi_\alpha \tag{16}$$

gilt, wobei ψ_α ein 1-fach kovarianter Tensor sei, so gilt der

Satz 5. *Zwei lineare Übertragungen sind genau dann projektiv äquivalent i. e. S., wenn sie dieselbe Richtungsübertragung liefern.*

Zusatz. *Die allgemeinste lineare Übertragung, die mit einer symmetrischen Übertragung* (2), (3) *(also im* WEYLschen *Sinne) die Richtungsübertragung gemeinsam hat, ist eine Übertragung* (2).

Beweis. Der Zusatz ist eine unmittelbare Folge von Satz 5, den man folgendermaßen beweist. Mögen zunächst die Richtungsübertragungen in einem Gebiet G des Raumes übereinstimmen. P sei ein beliebiger Punkt aus G, C eine beliebige Kurve durch P. Ein Tangentialvektor ξ^i_0 werde längs C von beiden Systemen $\widehat{\Gamma}^i_{k\alpha}, \Gamma^i_{k\alpha}$ übertragen:

$$\dot{\xi}^i + \widehat{\Gamma}^i_{k\alpha} \xi^k x^0 \dot{x}^\alpha = 0; \qquad \dot{\eta}^i + \Gamma^i_{k\alpha} \eta^k x^0 \dot{x}^\alpha = 0.$$

Wegen der Gleichheit der Richtungsübertragung gilt längs C: $\eta^i = \mu \cdot \xi^i (\mu > 0)$. Dann folgt aus der rechten der obigen Gleichungen

$$\dot{\mu}\, \xi^i + \mu (\dot{\xi}^i + \Gamma^i_{k\alpha} \xi^k x^0 \dot{x}^\alpha) = 0.$$

Wegen der linken Gleichung ergibt sich durch Einsetzen

$$\dot{\mu}\, \xi^i = \mu [\Gamma^i_{k\alpha}] \xi^k x^0 \dot{x}^\alpha.$$

Daraus folgt durch Multiplikation mit ξ^λ sofort

$$\xi^\lambda [\Gamma^i_{k\alpha}] \xi^k x^0 \dot{x}^\alpha = \xi^i [\Gamma^\lambda_{k\alpha}] \xi^k x^0 \dot{x}^\alpha.$$

Diese Gleichung gilt insbesondere in P, wo ξ^i_0 und $\dot{x}^\alpha$ beliebig waren, so daß in P identisch in den ξ^i

$$(\delta^\lambda_\varrho [\Gamma^i_{k\alpha}] - \delta^i_\varrho [\Gamma^\lambda_{k\alpha}]) \xi^\varrho \xi^k = 0$$

gilt. Das ist gleichbedeutend mit

$$\delta^\lambda_\varrho [\Gamma^i_{k\alpha}] + \delta^\lambda_k [\Gamma^i_{\varrho\alpha}] - \delta^i_\varrho [\Gamma^\lambda_{k\alpha}] - \delta^i_k [\Gamma^\lambda_{\varrho\alpha}] = 0,$$

[2]) Dieser und der folgende Abschnitt dienen unter anderem zur Berichtigung und Erweiterung des in der LYRAschen Arbeit [4] im letzten Absatz des 2. Abschnittes Gesagten.

woraus durch Verjüngung nach λ und ϱ

$$[\Gamma^i_{k\alpha}] = \delta^i_k \left(\frac{1}{n} [\Gamma^\lambda_{\lambda\alpha}] \right),$$

also die Behauptung folgt. — Die Umkehrung ergibt sich so: Gilt (16), so lauten die Übertragungsgleichungen

$$\dot{\xi}^i + \Gamma^i_{k\alpha} \xi^k x^0 \dot{x}^\alpha + \psi_\alpha x^0 \dot{x}^\alpha \xi^i = 0; \qquad \dot{\eta}^i + \Gamma^i_{k\alpha} \eta^k x^0 \dot{x}^\alpha = 0.$$

Gehen wir in irgendeinem Punkte von C von einem beliebigen Vektor aus, so gilt für den Zusammenhang der Lösungen

$$\eta^i = e^{\int_{P_0}^{P} \psi_\alpha x^0 \, dx^\alpha} \cdot \xi^i = \mu \cdot \xi^i$$

mit $\mu > 0$, w. z. b. w.

Ein nur von der Richtungsübertragung abhängiger Tensor ist offenbar $R^i_{k\alpha\beta}$ und daher wegen

$$K^i_{k\alpha\beta} - \delta^i_k K_{\alpha\beta} = R^i_{k\alpha\beta} - \delta^i_k R_{\alpha\beta}, \tag{17}$$

worin $K_{\alpha\beta} = K^\iota_{\alpha\iota\beta}$, $R_{\alpha\beta} = R^\iota_{\alpha\iota\beta}$ gesetzt wurde, auch der Tensor

$$P^i_{k\alpha\beta} = K^i_{k\alpha\beta} - \delta^i_k K_{\alpha\beta}. \tag{18}$$

Nennen wir einen im Gebiet G mit einem affinen Zusammenhang i. w. S. ausgestatteten Raum in G projektiv eben i. e. S., wenn dort in einem geeigneten Bezugssystem die Darstellung

$$\tilde{\Gamma}^i_{k\alpha} = \tfrac{1}{2} \delta^i_k \psi_\alpha \tag{19}$$

gilt, so folgt leicht der

Satz 6. *Für $n > 2$ ist der Raum in G genau dann projektiv eben i. e. S., wenn in G*

$$P^i_{k\alpha\beta} \equiv 0 \tag{20}$$

gilt. Eine für alle $n \geqq 2$ gültige Charakterisierung dieser projektiven Ebenheit ist

$$R^i_{k\alpha\beta} \equiv 0. \tag{21}$$

Beweis. (20) und (21) sind für $n > 2$ gleichbedeutend. Wegen (17) folgt aus (21) sofort (20). Gilt umgekehrt (20), so wegen (17) $R^i_{k\alpha\beta} = \delta^i_k R_{\alpha\beta}$, daher $R_{\alpha\beta} = -R_{\beta\alpha}$ wegen (9). Die zuerst beim Beweise von Satz 1 angewandte Schlußweise liefert für $n > 2$ wieder $R_{\alpha\beta} = 0$ und damit (21). Nun zeigen wir einfach (21) für $n \geqq 2$. Ist der Raum in G projektiv eben i. e. S., so gilt in einem geeigneten Bezugssystem (19), also $\Gamma^i_{k\alpha} = 0$, also $R^i_{k\alpha\beta} = 0$. Gilt umgekehrt letzteres, so folgt wie gewöhnlich die Existenz eines Bezugssystems, in dem die $\Gamma^i_{k\alpha}$ verschwinden. In diesem Bezugssystem gilt dann (19). — Auf eine andere Weise lassen sich die i. e. S. projektiv ebenen Räume durch den Begriff der Richtungsübertragung charakterisieren. Es gilt der

Satz 7. *Für $n>2$ ist ein Raum im Gebiet G genau dann projektiv eben i. e. S., wenn in G die Richtungsübertragung vom Wege unabhängig ist.*

Beweis. Ist der Raum in G projektiv eben i. e. S., so ist nach Satz 6 in G $R^i_{k\alpha\beta}=0$ und daher die durch die $\Gamma^i_{k\alpha}$ des affinen Zusammenhanges i. w. S. gegebene Vektorübertragung vom Wege unabhängig, also auch die durch sie definierte Richtungsübertragung. Nach Satz 5, Zusatz hat aber der gegebene affine Zusammenhang i. w. S. die Richtungsübertragung mit der durch seine $\Gamma^i_{k\alpha}$ gegebenen Richtungsübertragung gemeinsam. Also ist erstere ebenfalls vom Wege unabhängig. — Nun sei umgekehrt die Richtungsübertragung des gegebenen affinen Zusammenhanges i. w. S. überall in G integrabel. Dann ist es nach Satz 5, Zusatz auch die der $\Gamma^i_{k\alpha}$. Bei Vektorübertragung durch die $\Gamma^i_{k\alpha}$ um ein infinitesimales Parallelogramm mit einem beliebigen Ausgangspunkt $P\in G$ gilt daher wegen

$$\Delta\xi^i=-R^i_{k\alpha\beta}\xi^k\Delta x^{\alpha\beta};\qquad \Delta x^{\alpha\beta}=\tfrac{1}{2}(dx^\alpha\delta x^\beta-dx^\beta\delta x^\alpha)$$

und der Voraussetzung $\Delta\xi^i=\varepsilon\xi^i$ der Integrabilität:

$$\xi^j R^i_{k\alpha\beta}\xi^k\Delta x^{\alpha\beta}=\xi^i R^j_{k\alpha\beta}\xi^k\Delta x^{\alpha\beta}$$

identisch in den Komponenten ξ^i der übertragenen Vektoren und $\Delta x^{\alpha\beta}$ der von P ausgehenden infinitesimalen Parallelogramme. Daraus folgt

$$\Delta x^{\alpha\beta}\cdot(\delta^j_r R^i_{k\alpha\beta}-\delta^i_r R^j_{k\alpha\beta})\xi^r\xi^k=0$$

und daraus wegen der Schiefsymmetrie der Koeffizienten dieser Form in α und β:

$$(\delta^j_r R^i_{k\alpha\beta}-\delta^i_r R^j_{k\alpha\beta})\xi^r\xi^k=0.$$

Diese Identität zieht sofort

$$\delta^j_r R^i_{k\alpha\beta}-\delta^i_r R^j_{k\alpha\beta}=-(\delta^i_k R^i_{r\alpha\beta}-\delta^i_k R^j_{r\alpha\beta})$$

nach sich, und durch Verjüngung nach j und r erhalten wir

$$R^i_{k\alpha\beta}=\delta^i_k\cdot\left(\frac{1}{n}R^j_{j\alpha\beta}\right),$$

daraus durch Verjüngung nach i und α: $R_{\alpha\beta}=\frac{1}{n}R^j_{j\alpha\beta}$, also schließlich durch Einsetzen in die davor gewonnene Gleichung

$$R^i_{k\alpha\beta}=\delta^i_k R_{\alpha\beta}.$$

Daß diese Gleichung für $n>2$ (21) zur Folge hat, wissen wir aus dem Beweis von Satz 6. Ebenda wurde ferner gezeigt, daß (21) die projektive Ebenheit i. e. S. zur Folge hat. — Eine Folge von Satz 7 ist, daß es keine symmetrischen Übertragungen gibt, welche zwar die Richtungen vom Wege unabhängig übertragen, nicht aber die Vektoren.

Die projektive Beschaffenheit des Raumes. Im vorigen Abschnitt wurde nur ein Spezialfall des folgenden allgemeineren Äquivalenzbegriffes für zwei affine

Zusammenhänge i. w. S. betrachtet. Zwei durch die Komponenten $\widetilde{\Gamma}'^{\,i}_{k\alpha}$ und $\widetilde{\Gamma}^{i}_{k\alpha}$ gegebene affine Zusammenhänge (2) mögen projektiv äquivalent heißen, wenn die invariante Beziehung

$$[\widetilde{\Gamma}^{i}_{k\alpha}] =: \widetilde{\Gamma}'^{\,i}_{k\alpha} - \widetilde{\Gamma}^{i}_{k\alpha} = -\tfrac{1}{2}(\delta^{i}_{k}\psi_{\alpha} + \delta^{i}_{\alpha}\chi_{k}) \tag{22}$$

besteht, wobei ψ_α und χ_α 1-fach kovariante Tensoren seien. (22) läßt sich auch in der Form

$$[\Gamma^{i}_{k\alpha}] = \Gamma'^{\,i}_{k\alpha} - \Gamma^{i}_{k\alpha} = -\tfrac{1}{2}(\delta^{i}_{k}\chi_{\alpha} + \delta^{i}_{\alpha}\chi_{k}) \tag{23}$$

$$[\varphi_\alpha] = \varphi'_\alpha - \varphi_\alpha = \psi_\alpha - \chi_\alpha \tag{24}$$

schreiben, wie man sofort aus (2) entnimmt. Durch (23) ist eine projektive Äquivalenz auch für den symmetrischen Anteil des affinen Zusammenhanges i. w. S. definiert. Es gilt der

Satz 8. *Zwei affine Zusammenhänge i. w. S. sind genau dann projektiv äquivalent, wenn ihre symmetrischen Anteile es sind.*

Beweis. Gilt nämlich (22), so wegen $[\widetilde{\Gamma}^{i}_{k\alpha}] = [\Gamma^{i}_{k\alpha}] - \frac{1}{2}\delta^{i}_{k}[\varphi_\alpha]$ und (22) auch

$$[\Gamma^{i}_{k\alpha}] - \tfrac{1}{2}\delta^{i}_{k}[\varphi_\alpha] = \{-\tfrac{1}{2}(\delta^{i}_{k}\chi_{\alpha} + \delta^{i}_{\alpha}\chi_{k})\} - \tfrac{1}{2}\delta^{i}_{k}(\psi_\alpha - \chi_\alpha),$$

woraus leicht auf (23), (24) geschlossen wird. Sind andererseits (23), (24) erfüllt, so bilde man einfach $[\widetilde{\Gamma}^{i}_{k\alpha}]$, und es ergibt sich (22).

Die *projektive Beschaffenheit* des Raumes ist nach Weyl durch die geodätischen Linien des affinen Zusammenhanges gegeben, deren Gleichungen in unserem Falle von der (invarianten) Form

$$x^0\ddot{x}^i + \Gamma^{i}_{k\alpha}x^0\dot{x}^k x^0\dot{x}^\alpha - \tfrac{1}{2}(\varphi_\alpha - \overset{\circ}{\varphi}_\alpha)x^0\dot{x}^\alpha x^0\dot{x}^i = \gamma(t)\,x^0\dot{x}^i \tag{25}$$

sind. Wir erhalten

Satz 9. *Zwei affine Zusammenhänge i. w. S. definieren in einem Gebiet G genau dann dieselbe projektive Beschaffenheit des Raumes, wenn sie projektiv äquivalent im Sinne von* (22) *sind.*

Beweis. Seien zunächst zwei projektiv äquivalente affine Zusammenhänge i. w. S. in G eingeführt, so daß also für die Komponenten (22) gilt. Aus (25) geht durch Einsetzen von (22) mit der Abkürzung $\gamma' = \gamma - (\psi_\alpha + \chi_\alpha)\,x^0\dot{x}^\alpha$ wieder eine Gleichung der Form (25) hervor, in der jetzt an Stelle der ungestrichenen die gestrichenen Größen stehen, so daß wieder eine geodätische Linie vorliegt, diesmal in bezug auf den anderen affinen Zusammenhang. Ebenso schließt man zurück. — Nun mögen die affinen Zusammenhänge dieselbe projektive Beschaffenheit definieren. Dann gilt in jedem Punkt von G identisch in den ξ^i

$$\xi^i[\widetilde{\Gamma}^{k}_{\varrho\alpha}]\,\xi^\varrho\xi^\alpha = \xi^k[\widetilde{\Gamma}^{i}_{\varrho\alpha}]\,\xi^\varrho\xi^\alpha.$$

Seien nämlich $P \in G$ und ein Vektor ξ^i beliebig gegeben. Dann definiert dieser Vektor eine bestimmte Richtung in P und damit je eine geodätische Linie

bezüglich der Übertragungen $\widetilde{\Gamma}'^{i}_{k\alpha}$ und $\widetilde{\Gamma}^{i}_{k\alpha}$, die aber wegen der Gleichheit der projektiven Beschaffenheit zusammenfallen. Sei $x^i(t)$ eine Parameterdarstellung dieser geodätischen Linie mit $x^i(0)$ in P. Dann gilt $x^0 x^i(0) = \mu\, \xi^i$ mit $\mu \neq 0$. Die Subtraktion der beiden Gleichungen für die geodätische Linie liefert in P die Gleichung

$$\mu^2 [\widetilde{\Gamma}^{i}_{k\alpha}]\, \xi^k \xi^\alpha = (\gamma' - \gamma)\, \mu\, \xi^i.$$

Durch Multiplikation mit ξ^k folgt daraus nach Division mit μ^2 die Behauptung. Nun setzt man $[\widetilde{\Gamma}^{i}_{k\alpha}] = [\Gamma^{i}_{k\alpha}] - \frac{1}{2}\delta^i_k [\varphi_\alpha]$ in die gewonnene Gleichung ein und erhält

$$\xi^i [\Gamma^{k}_{\varrho\alpha}]\, \xi^\varrho \xi^\alpha = \xi^k [\Gamma^{i}_{\varrho\alpha}]\, \xi^\varrho \xi^\alpha.$$

Nach WEYL [2] (S. 64) folgt daraus (23). (22) ist endlich eine weitere unmittelbare Folge.

Die Angabe eines allgemeinen Tensors der Projektivkrümmung gelingt in Verallgemeinerung des entsprechenden von WEYL eingeführten Tensors (WEYL [1], [2]) leicht auf Grund von Satz 8. Wir definieren

$$P^{i}_{k\alpha\beta} = R^{i}_{k\alpha\beta} - \widehat{G}^{i}_{k\alpha\beta} \tag{26}$$

$$\widehat{G}^{i}_{k\alpha\beta} = \delta^i_k (G_{\alpha\beta} - G_{\beta\alpha}) + (\delta^i_\alpha G_{k\beta} - \delta^i_\beta G_{k\alpha}) \tag{27}$$

$$G_{\alpha\beta} = \frac{n R_{\alpha\beta} + R_{\beta\alpha}}{n^2 - 1} \tag{28}$$

als Tensor der Projektivkrümmung. $P^{i}_{k\alpha\beta}$ stimmt für zwei durch (22) verknüpfte affine Zusammenhänge i. w. S. überein, wie man sofort bei Einführung der Normaleichung $x^0 = 1$ auf Grund der WEYLschen Überlegungen in [1] sieht. Nennen wir den Raum in G projektiv eben, wenn in einem geeigneten Bezugssystem

$$\widetilde{\Gamma}^{i}_{k\alpha} = \tfrac{1}{2}(\delta^i_k \psi_\alpha + \delta^i_\alpha \chi_k) \tag{29}$$

gilt, so ist für $n > 2$ wieder das Verschwinden des Tensors der Projektivkrümmung für dieses Ebensein charakteristisch. Da (29) gegen Umeichungen invariant ist, genügt es den Beweis bei Normaleichung zu führen. Dann liegen aber die Verhältnisse wieder wie bei WEYL, und wir können uns auf seine Ergebnisse in [1] berufen. Es gilt also

Satz 10. *In einem im Gebiet G mit einem affinen Zusammenhang i. w. S. ausgestatteten Raum ist in G der Tensor* (26) *als Tensor der Projektivkrümmung zu bezeichnen, denn er hängt nur von der projektiven Beschaffenheit in G ab und verschwindet für $n > 2$ genau dann identisch in G, wenn der Raum in G projektiv eben ist.*

Auf Grund entsprechender Schlußweisen kommt man zur Verallgemeinerung des WEYLschen Ergebnisses für $n = 2$:

Zusatz. *Für $n=2$ ist der Raum in G genau dann projektiv eben, wenn*

$$\overset{\circ}{V}_\beta G_{\alpha\gamma} - \overset{\circ}{V}_\gamma G_{\alpha\beta} \equiv 0 \tag{30}$$

identisch in G gilt. Dabei ist

$$\overset{\circ}{V}_\beta G_{\alpha\gamma} = \frac{1}{x^0} \cdot \frac{\partial G_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} G_{\nu\gamma} - \Gamma^\nu_{\gamma\beta} G_{\nu\alpha} + \overset{\circ}{\varphi}_\beta G_{\alpha\gamma} \tag{31}$$

gesetzt (kovariante Ableitung bezüglich $\Gamma^i_{k\alpha} - \frac{1}{2}\delta^i_k \overset{\circ}{\varphi}_\alpha$).

(31) erreicht, daß (30) ein Tensor in unserem Sinne ist und daß zugleich (30) bei Normaleichung, wo ja $\overset{\circ}{\varphi}_\alpha = 0$ ist, in die Weylsche Formel übergeht. Unter Berufung auf Weyls Ergebnis ist damit auch der Zusatz bewiesen.

Metrische Geometrie im Raume. In einem metrischen Raume im Weylschen Sinne gibt es im allgemeinen noch mehrere kongruente affine Zusammenhänge i. w. S. Sind g_{ik}, γ_α die Komponenten der metrischen Fundamentaltensoren, so gelten für die Komponenten $\Gamma^i_{k\alpha}, \varphi_\alpha$ eines kongruenten affinen Zusammenhanges i. w. S. die Bedingungen

$$\Gamma^i_{k\alpha} = \frac{1}{x^0} \cdot \begin{Bmatrix} i \\ k\,\alpha \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\{\delta^i_k(\varphi_\alpha + \gamma_\alpha) + \delta^i_\alpha(\varphi_k + \gamma_k) - g^{i\lambda} g_{k\alpha}(\varphi_\lambda + \gamma_\lambda)\} \tag{32}$$

ähnlich wie bei Lyra [4], Formel (10) in der Riemannschen Geometrie. In (32) sind die φ_α noch willkürlich, so daß wir sie als bei metrischen Umeichungen invariant annehmen können; dann sind auch die $\Gamma^i_{k\alpha}$ und damit die $\widetilde{\Gamma}^i_{k\alpha}$ bei metrischen Umeichungen absolut invariant und damit alle oben betrachteten Tensoren. Der allgemeine projektive Standpunkt, wie er im vorigen Abschnitt dargelegt wurde, führt schließlich zu

Satz 11. *In einem metrischen Raume gegebener projektiver Beschaffenheit gibt es höchstens einen kongruenten affinen Zusammenhang i. w. S.*

Beweis. Gäbe es deren zwei, so hätten wir wegen (32) für die Differenzen ihrer Komponenten die Gleichungen

$$[\widetilde{\Gamma}^i_{k\alpha}] = -\tfrac{1}{2} g^{i\lambda}(g_{k\alpha}[\varphi_\lambda] - g_{\lambda\alpha}[\varphi_k]).$$

Wegen Satz 9 und (22) erhält man durch Eliminierung von $[\widetilde{\Gamma}^i_{k\alpha}]$:

$$-\tfrac{1}{2} g^{i\lambda}(g_{k\alpha}[\varphi_\lambda] - g_{\lambda\alpha}[\varphi_k]) = -\tfrac{1}{2}(\delta^i_k \psi_\alpha + \delta^i_\alpha \chi_k);$$

daraus durch Überschiebung mit g_{ik}

$$g_{k\alpha}[\varphi_\lambda] - g_{\lambda\alpha}[\varphi_k] = g_{\lambda k}\psi_\alpha + g_{\lambda\alpha}\chi_k$$

und daraus wegen $[\varphi_\alpha] = \psi_\alpha - \chi_\alpha$

$$g_{k\alpha}\chi_\lambda = g_{k\alpha}\psi_\lambda - g_{\alpha\lambda}\psi_k - g_{\lambda k}\psi_\alpha.$$

Überschiebung mit g^{ik} liefert darauf

$$\delta^i_k \chi_\lambda = (-g_{\lambda k} g^{i\alpha}\psi_\alpha) + (\delta^i_k \psi_\alpha - \delta^i_\lambda \psi_k).$$

Die erste Klammer ist symmetrisch, die zweite schiefsymmetrisch in den Indizes λ und k für jedes i; also gilt

$$\tfrac{1}{2}(\delta^i_k \chi_\lambda + \delta^i_\lambda \chi_k) = -g_{\lambda k} g^{i\alpha} \psi_\alpha$$

$$\tfrac{1}{2}(\delta^i_k \chi_\lambda - \delta^i_\lambda \chi_k) = \delta^i_k \psi_\lambda - \delta^i_\lambda \psi_k .$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt durch Verjüngung

$$\psi_\lambda = -\tfrac{1}{2}(n+1)\chi_\lambda ,$$

aus der zweiten ebenso

$$\psi_\lambda = \tfrac{1}{2}\chi_\lambda$$

und daher durch Elimination von ψ_λ: $(n+2)\chi_\lambda = 0$, daher $\chi_\lambda = 0$ und $\psi_\lambda = 0$, somit schließlich wegen (22) $[\widetilde{\Gamma}^i_{k\alpha}] = 0$, w. z. b. w.

Literatur.

[1] WEYL, H.: Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1921**, 99—112. — [2] WEYL, H.: Mathematische Analyse des Raumproblems. Berlin 1923. — [3] CHEVALLEY, C.: Theory of LIE-Groups. Princeton 1946. — [4] LYRA, G.: Über eine Modifikation der RIEMANNschen Geometrie. Math. Z. **54**, 52—64 (1951).

Göttingen, Universität, Mathematisches Institut.

(Eingegangen am 28. Mai 1952.)

Reichel, G.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 75—85 (1952)

Zur Transformationstheorie der Matrizen über dem Ring der ganzen p-adischen Zahlen.

Von
Georg Reichel.

Einleitung.

Die Transformationstheorie $A \to T A T^{-1}$ der invertierbaren Matrizen A ist bisher im wesentlichen nur für den Fall der Matrizen über beliebigen Körpern vollständig durchgeführt worden. Sie führte hier unter anderem zur Angabe der rationalen Normalformen als Repräsentanten der Klassen ähnlicher Matrizen (vgl. z.B. [1] § 5, Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit). In dieser Note sollen nun Matrizen über dem Ring $\mathfrak{R}_p$ der ganzen p-adischen Zahlen untersucht werden, da diese z.B. eine wesentliche Rolle in der Theorie der metabelschen Gruppen spielen. Das folgende Beispiel zeigt, daß schon die Matrizen, deren Elemente Restklassen nach dem Modul p^2 sind, betrachtenswert sind.

Die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}(2^2, 2^2)$ der abelschen Gruppe vom Typus $(2^2, 2^2)$ läßt sich durch alle zweireihigen Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

($a_{ik}, b_{ik} = 0,1$; $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \equiv 0 \bmod 2$) darstellen. Diese Gruppe zerfällt in 14 Klassen konjugierter Elemente, als deren Repräsentanten wir z.B. die Elemente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

auswählen können. Das Beispiel zeigt, daß sich die bekannten rationalen Normalformen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

der Automorphismengruppe $\mathfrak{A}(2, 2)$ der abelschen Gruppe vom Typus $(2, 2)$ in $\mathfrak{A}(2^2, 2^2)$ aufspalten.

Die vorliegende Note beginnt in den beiden ersten Paragraphen mit der allgemeinen Theorie und wendet die erhaltenen Ergebnisse im 3. Paragraphen auf Matrizen A über $\mathfrak{R}_p$ an, für die $A - xE$ nach dem Modul p nur einen Elementarteiler besitzt und bestimmt die Normalformen der zweireihigen invertierbaren Matrizen über $\mathfrak{R}_p$.

§ 1. Es sei $\mathfrak{L}_p$ ein s-dimensionaler Vektorraum, dessen Koeffizientenbereich der Ring $\mathfrak{R}_p$ der ganzen p-adischen Zahlen ist. Wir betrachten eine umkehrbare lineare Transformation σ von $\mathfrak{L}_p$, für die bei einer Basis $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ von $\mathfrak{L}_p$

$$\sigma(\mathfrak{a}_k) = \sum_{i=1}^{s} a_{ik}\,\mathfrak{a}_i$$

gilt. Die Transformation σ wird also bezüglich der Basis $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ durch die Matrix $A = (a_{ik})$ beschrieben. Bekanntlich gibt es mindestens eine geeignete Basis von $\mathfrak{L}_p$, für die die zugehörige Matrix von σ nach dem Modul p genommen gerade die Gestalt einer rationalen Normalform besitzt ([1] S. 91). Sei etwa

$$\mathfrak{t}_{h1}, \ldots, \mathfrak{t}_{h\nu_h};\ \ldots;\ \mathfrak{t}_{i1}, \ldots, \mathfrak{t}_{i\nu_i};\ \ldots;\ \mathfrak{t}_{s1}, \ldots, \mathfrak{t}_{s\nu_s} \tag{1.1}$$

mit $\sum_{i=h}^{s} \nu_i = s$ eine solche Basis von $\mathfrak{L}_p$. Dann gilt

$$\begin{cases} \sigma\,\mathfrak{t}_{i1} \equiv \mathfrak{t}_{i2}(p) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma\,\mathfrak{t}_{i,\nu_i-1} \equiv \mathfrak{t}_{i\nu_i}(p) \\ \sigma\,\mathfrak{t}_{i\nu_i} \equiv a_1^{(i)}\,\mathfrak{t}_{i1} + \cdots + a_{\nu_i}^{(i)}\,\mathfrak{t}_{i\nu_i}(p). \end{cases} \qquad (i = h, \ldots, s) \tag{1.2}$$

Dabei sind die $a_k^{(i)}$ die Koeffizienten der Elementarteiler

$$e_i(x) \equiv -a_1^{(i)} - a_2^{(i)}\,x - \cdots - a_{\nu_i}^{(i)}\,x^{\nu_i-1} + x^{\nu_i}(p) \qquad (i = h, \ldots, s) \tag{1.3}$$

der Matrix $A - xE \bmod p$. (Da σ eine umkehrbare Transformation von $\mathfrak{L}_p$ war, gibt es modulo p keine verschwindenden Elementarteiler).

Wir gehen nun von der Basis (1.1) zur Basis

$$\mathfrak{t}'_{h1}, \ldots, \mathfrak{t}'_{h\nu_h};\ \ldots;\ \mathfrak{t}'_{s1}, \ldots, \mathfrak{t}'_{s\nu_s} \tag{1.4}$$

von $\mathfrak{L}_p$ über, die mit der Basis (1.1) durch die Gleichungen

$$\begin{cases} \mathfrak{t}'_{i1} = \mathfrak{t}_{i1} \\ \mathfrak{t}'_{i2} = \sigma\,\mathfrak{t}_{i1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{t}'_{i\nu_i} = \sigma^{\nu_i-1}\mathfrak{t}_{i1} \end{cases} \qquad (i = h, \ldots, s) \tag{1.5}$$

verknüpft ist. Es gilt offenbar $\mathfrak{t}'_{i\lambda} \equiv \mathfrak{t}_{i\lambda}(p)$ für $\lambda = 1, \ldots, \nu_i$; $i = h, \ldots, s$ und man sieht leicht, daß dieser Basiswechsel umkehrbar ist. Sei nämlich $\mathfrak{T}$ die Basisspalte (1.1), $\mathfrak{T}'$ die Basisspalte (1.4) so gilt wegen (1.5)

$$\mathfrak{T}' = E\,\mathfrak{T} + p\,C\,\mathfrak{T},$$

wobei C eine bestimmte Matrix über $\mathfrak{R}_p$ ist. Die Umkehrung lautet

$$\mathfrak{T} = E\,\mathfrak{T}' - p\,C\,\mathfrak{T}' + p^2\,C^2\,\mathfrak{T}' - + \cdots. \tag{1.6}$$

In dieser Basis gilt

$$\sigma\,\mathfrak{t}'_{i1} = \mathfrak{t}'_{i2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sigma\,\mathfrak{t}'_{i,\nu_i-1}\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'_{i\nu_i}$$

und weiter

$$\sigma\,\mathfrak{t}'_{i\nu_i} \equiv \sigma\,\mathfrak{t}_{i\nu_i} \equiv a_1^{(i)}\mathfrak{t}_{i1} + \cdots + a_{\nu_i}^{(i)}\mathfrak{t}_{i\nu_i} \equiv a_1^{(i)}\mathfrak{t}'_{i1} + \cdots + a_{\nu_i}^{(i)}\mathfrak{t}'_{i\nu_i}(p) \quad (i = h, \ldots, s).$$

Da $\sigma\,\mathfrak{t}'_{i\nu_i} = \sigma^{\nu_i}\mathfrak{t}_{i1}$ ist, kann $\sigma\,\mathfrak{t}'_{i\nu_i}$ als Linearkombination der $\mathfrak{t}_{i\lambda}$ über $\mathfrak{R}_p$ und mittels (1.6) als Linearkombination der $\mathfrak{t}'_{i\lambda}$ über $\mathfrak{R}_p$ ausgedrückt werden. Stellen wir jetzt die Matrix von σ bezüglich der Basis (1.4) auf, so erhalten wir das Resultat[1]):

Satz 1. *Es sei σ eine umkehrbare lineare Transformation von $\mathfrak{L}_p$. Dann gibt es immer mindestens eine Basis von $\mathfrak{L}_p$, für die die Matrix A von σ die Gestalt*

$$A = A_0 + p\,A'$$

mit

$$\left\{\begin{array}{l} A_0 \equiv \begin{pmatrix} A_{hh} & & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix}(p), \qquad A_{ii} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_1^{(i)} \\ 1 & \ldots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & a_{\nu_i}^{(i)} \end{pmatrix}(p) \\ (\nu_h \leq \nu_{h+1} \leq \cdots \leq \nu_s;\ 0 \leq a_k^{(i)} \leq p-1), \\ A' = \begin{pmatrix} A'_{hh} & \ldots & A'_{hs} \\ \vdots & & \vdots \\ A'_{sh} & \ldots & A'_{ss} \end{pmatrix}, \qquad A'_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_1^{(i,k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{\nu_i}^{(i,k)} \end{pmatrix} \end{array}\right. \tag{1.7}$$

($a_j^{(i,k)} \in \mathfrak{R}_p$) hat. Dabei sind die $a_k^{(i)}$ die Koeffizienten der Elementarteiler (1.3) *der Matrix $A - xE(p)$.*

§ 2. Es sei für $n \geqq 1$ die p-adische Entwicklung

$$A = A_0 + p\,A_1 + \cdots + p^{n-1}A_{n-1} + p^n A_n + \cdots \tag{2.1a}$$

einer Matrix A über $\mathfrak{R}_p$ vorgelegt. Wir betrachten nun alle zu A über $\mathfrak{R}_p$ ähnlichen Matrizen B, für die

$$A \equiv B \bmod p^n$$

gilt. Die Matrizen B besitzen dann die p-adische Entwicklung

$$B = A_0 + p\,A_1 + \cdots + p^{n-1}A_{n-1} + p^n B_n + \cdots, \tag{2.1b}$$

[1]) Der hier durchgeführte Beweis geht auf eine Anregung von Herrn H. Wielandt zurück.

und zu jedem B gibt es ein T über $\mathfrak{R}_p$ mit

$$T A T^{-1} = B. \tag{2.2}$$

Aus den Matrizen B wollen wir nun diejenigen aussuchen, für die B_n eine möglichst einfache Gestalt hat. Aus (2.2) folgt

$$T A T^{-1} \equiv A \bmod \mathfrak{p}^n,$$

und da sich jede umkehrbare Matrix T über $\mathfrak{R}_p$ in der Form

$$T = T_0(E + \mathfrak{p}^n T_1)$$

darstellen läßt, können nur die folgenden beiden Transformationen die Matrix A_n beeinflussen:

1. Transformation von A mit $E + \mathfrak{p}^n T_1$, wobei T_1 eine beliebige Matrix über $\mathfrak{R}_p$ ist.

2. Transformation von A mit der allgemeinsten umkehrbaren Lösung T_0 der Gleichung

$$T_0(A_0 + \cdots + \mathfrak{p}^{n-1} A_{n-1}) = (A_0 + \cdots + \mathfrak{p}^{n-1} A_{n-1}) T_0.$$

In diesem Abschnitt sollen die Transformationen der 1. Art untersucht werden. Aus $T = E + \mathfrak{p}^n T_1$ erhalten wir mit $T^{-1} \equiv E - \mathfrak{p}^n T_1 \bmod \mathfrak{p}^{n+1}$

$$T A T^{-1} \equiv A_0 + \cdots + \mathfrak{p}^{n-1} A_{n-1} + \mathfrak{p}^n (A_n + T_1 A_0 - A_0 T_1) \bmod \mathfrak{p}^{n+1}$$

oder

$$B_n - A_n \equiv T_1 A_0 - A_0 T_1 \bmod \mathfrak{p}. \tag{2.3}$$

Es sei nun nach Satz 1

$$A_0 \equiv \begin{pmatrix} A_{hh} & & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix} (\mathfrak{p}), \qquad A_{ii} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1^{(i)} \\ 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{\nu_i}^{(i)} \end{pmatrix} (\mathfrak{p}),$$

$$A_n \equiv \begin{pmatrix} A_{hh}^{(n)} & \cdots & A_{hs}^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{sh}^{(n)} & \cdots & A_{ss}^{(n)} \end{pmatrix} (\mathfrak{p}), \qquad A_{ik}^{(n)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1^{(i,k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{\nu_i}^{(i,k)} \end{pmatrix} (\mathfrak{p}),$$

$$B_n \equiv \begin{pmatrix} B_{hh}^{(n)} & \cdots & B_{hs}^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{sh}^{(n)} & \cdots & B_{ss}^{(n)} \end{pmatrix} (\mathfrak{p}), \qquad B_{ik}^{(n)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \beta_1^{(i,k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{\nu_i}^{(i,k)} \end{pmatrix} (\mathfrak{p}),$$

$$T_1 \equiv \begin{pmatrix} T_{hh} & \cdots & T_{hs} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{sh} & \cdots & T_{ss} \end{pmatrix} (\mathfrak{p}), \qquad T_{ik} \equiv \begin{pmatrix} t_{11}^{(i,k)} & \cdots & t_{1\nu_k}^{(i,k)} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{\nu_i 1}^{(i,k)} & \cdots & t_{\nu_i \nu_k}^{(i,k)} \end{pmatrix} (\mathfrak{p}).$$

Wir wollen dann den folgenden Satz beweisen:

Satz 2. *Gilt für die Bestandteile $A_{ik}^{(n)}$ und $B_{ik}^{(n)}$ von A_n und B_n im Fall $\nu_i \leqq \nu_k$ die Beziehung $A_{ik}^{(n)} \equiv B_{ik}^{(n)} (\mathfrak{p})$, so gibt es keine Transformation $T = E + \mathfrak{p}^n T_1$, die (2.2) erfüllt. Im Fall $\nu_i > \nu_k$ gibt es mindestens eine Transformation $T = E + \mathfrak{p}^n T_1$, für die $B_{ik}^{(n)}$ die Gestalt*

$$B_{ik}^{(n)} \equiv \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & \beta_1^{(i,k)} \\ \vdots & \vdots \\ & \beta_{\nu_k}^{(i,k)} \\ & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \dots 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathfrak{p}) \tag{2.4}$$

annimmt.

Zum Beweis betrachten wir (2.3). Mit $B_n - A_n \equiv C(\mathfrak{p})$,

$$B_{ik}^{(n)} - A_{ik}^{(n)} \equiv C_{ik} \equiv \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & C_n^{(i,k)} \\ \vdots & \vdots \\ 0 \dots 0 & C_{p_i}^{(i,k)} \end{pmatrix} (\mathfrak{p})$$

erhalten wir aus (2.3) das Kongruenzensystem

$$T_{ik} A_{kk} - A_{ii} T_{ik} \equiv C_{ik} (\mathfrak{p}) \qquad (i, k = h, \dots, s). \tag{2.3a}$$

1. Es sei $\nu_i \leqq \nu_k$, dann erhalten wir aus (2.3a) das System

$$t_{1,\varrho+1}^{(i,k)} - a_1^{(i)} t_{\nu_i \varrho}^{(i,k)} \equiv 0 (\mathfrak{p}) \qquad (\varrho = 1, \dots, \nu_k - 1)$$

$$t_{\sigma,\varrho+1}^{(i,k)} - t_{\sigma-1,\varrho}^{(i,k)} - a_\sigma^{(i)} t_{\nu_i \varrho}^{(i,k)} \equiv 0 (\mathfrak{p}) \qquad (\sigma = 2, \dots, \nu_i;\ \varrho = 1, \dots, \nu_k - 1)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu_k} t_{1\lambda}^{(i,k)} a_\lambda^{(k)} - t_{\nu_i \nu_k}^{(i,k)} a_1^{(i)} \equiv c_1^{(i,k)} (\mathfrak{p})$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu_k} t_{\sigma\lambda}^{(i,k)} a_\lambda^{(k)} - t_{\sigma-1,\nu_k}^{(i,k)} - a_\sigma^{(i)} t_{\nu_i \nu_k}^{(i,k)} \equiv c_\sigma^{(i,k)} (\mathfrak{p}) \qquad (\sigma = 2, \dots, \nu_i).$$

D. E. Rutherford [2] zeigte unter Ausnutzung der Teilbarkeitseigenschaften der Elementarteiler der rationalen Normalform A_0, daß aus den ersten beiden Systemen bereits die Kongruenzen

$$\sum_{\lambda-1}^{\nu_k} t_{1\lambda}^{i,k} a_\lambda^{(k)} - t_{\nu_i \nu_k}^{(i,k)} a_1^{(i)} \equiv 0 (\mathfrak{p})$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu_k} t_{\sigma\lambda}^{(i,k)} a_\lambda^{(k)} - t_{\sigma-1,\nu_k}^{(i,k)} - a_\sigma^{(i)} t_{\nu_i \nu_k}^{(i,k)} \equiv 0 (\mathfrak{p})$$

folgen; daher ist (2.3a) in diesem Fall genau dann lösbar, wenn $C_{ik} \equiv 0_{ik} (\mathfrak{p})$ ist.

2. Es sei $\nu_i > \nu_k$. Da A_{ii} und ihre Transponierte A_{ii}^T modulo $\mathfrak{p}$ genau die gleichen Elementarteiler besitzen, gibt es mindestens eine Matrix M_i über $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$

mit $M_i^{-1} A_{ii} M_i = A_{ii}^T \bmod p$. Zum Beispiel genügt die Matrix

$$(2.5) \qquad M_i = (m_{\varrho\sigma}^{(i)}) \quad \text{mit} \quad m_{\varrho\sigma}^{(i)} \equiv \begin{cases} -a_{\varrho+\sigma}^{(i)} \ (p) & \text{für} \quad \varrho+\sigma < \nu_i+1 \\ 1 \quad (p) & \text{für} \quad \varrho+\sigma = \nu_i+1 \\ 0 \quad (p) & \text{für} \quad \varrho+\sigma > \nu_i+1 \end{cases}$$

dieser Kongruenz. Aus (2.3a) erhalten wir mit

$$R_{ki} \equiv M_k T_{ik}^T M_i^{-1} (p)$$

$$D_{ki} \equiv -M_k C_{ik}^T M_i^{-1} (p)$$

das Kongruenzensystem

$$(2.6) \qquad R_{ki} A_{ii} - A_{kk} R_{ki} \equiv D_{ki} (p).$$

Mit M_k aus (2.5) und beliebigem M_i folgt

$$D_{ki} \equiv \begin{pmatrix} d_1^{(k,i)} & \dots & d_{\nu_i}^{(k,i)} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} (p).$$

Aus (2.6) erhalten wir mit $R_{ki} = (r_{\varrho\sigma}^{(k,i)})\ (p)$ das Kongruenzensystem

$$(2.7a) \quad \begin{cases} r_{1\sigma}^{(k,i)} - a_1^{(k)} r_{\nu_k,\sigma-1}^{(k,i)} \equiv d_{\sigma-1}^{(k,i)} (p) & (\sigma = 2, \dots, \nu_i) \\ r_{\varrho\sigma}^{(k,i)} - r_{\varrho-1,\sigma-1}^{(k,i)} - a_\varrho^{(k)} r_{\nu_k,\sigma-1} \equiv 0 (p) & (\varrho = 2, \dots, \nu_k;\ \sigma = 2, \dots, \nu_i) \end{cases}$$

$$(2.7b) \quad \begin{cases} \sum_{\varrho=1}^{\nu_i} r_{1\varrho}^{(k,i)} a_\varrho^{(i)} - a_1^{(k)} r_{\nu_k \nu_i}^{(k,i)} \equiv d_{\nu_i}^{(k,i)} (p) \\ \sum_{\varrho=1}^{\nu_i} r_{\sigma\varrho}^{(k,i)} a_\varrho^{(i)} - r_{\sigma-1,\nu_i}^{(k,i)} - a_\sigma^{(k)} r_{\nu_k \nu_i}^{(k,i)} \equiv 0 (p) \qquad (\sigma = 2, \dots, \nu_k). \end{cases}$$

Die $a_\mu^{(i)}$ bzw. $a_\mu^{(k)}$ sind die Koeffizienten der beiden Polynome

$$A_i(x) \equiv \sum_{\sigma=1}^{\nu_i+1} a_\varrho^{(i)} x^{\varrho-1} (p) \quad \text{und} \quad A_k(x) \equiv \sum_{\varrho=1}^{\nu_k+1} a_\varrho^{(k)} x^{\varrho-1} (p)$$

mit $a_{\nu_i+1}^{(i)} \equiv a_{\nu_k+1}^{(k)} \equiv -1\ (p)$. Es gilt $A_k(x) \mid A_i(x)\ (p)$, d.h. es gibt ein

$$B(x) \equiv \sum_{\varrho=1}^{\nu_i-\nu_k+1} b_\varrho x^{\varrho-1} (p) \qquad (b_{\nu_i-\nu_k+1} \equiv 1\ (p))$$

mit

$$A_i(x) \equiv B(x) A_k(x)\ (p).$$

Dann gilt

$$a_{\lambda+1}^{(i)} \equiv \sum_{\varrho=\mathrm{Max}(0,\,\lambda-\nu_k)}^{\mathrm{Min}(\lambda,\,\nu_i-\nu_k)} b_{\varrho+1} a_{\lambda-\varrho+1}^{(k)} (p)$$

und setzen wir dies in (2.7b) ein, so erhalten wir

$$(2.8a)\quad \begin{cases} \sum_{\sigma=1}^{\nu_i-\nu_k} b_\sigma \left\{ \sum_{\varrho=1}^{\nu_k} a_\varrho^{(k)} r_{1,\sigma+\varrho-1}^{(k,i)} - r_{1,\nu_k+\sigma}^{(k,i)} \right\} + \\ \qquad + \sum_{\sigma=1}^{\nu_k} a_\sigma^{(k)} r_{1,\nu_i-\nu_k+\sigma}^{(k,i)} - a_1^{(k)} r_{\nu_k,\nu_i}^{(k,i)} \equiv d_{\nu_i}^{(k,i)}(p) \\ \sum_{\sigma=1}^{\nu_i-\nu_k} b_\sigma \left\{ \sum_{\varrho=1}^{\nu_k} a_\varrho^{(k)} r_{\mu,\sigma+\varrho-1}^{(k,i)} - r_{\mu,\nu_k+\sigma}^{(k,i)} \right\} + \\ \qquad + \sum_{\sigma=1}^{\nu_k} a_\varrho^{(k)} r_{\mu,\nu_i-\nu_k+\sigma}^{(k,i)} - r_{\mu-1,\nu_i}^{(k,i)} - a_\mu^{(k)} r_{\nu_k,\nu_i}^{(k,i)} \equiv 0(p) \quad (\mu = 2, \ldots, \nu_k). \end{cases}$$

Man bestätigt leicht, daß die Kongruenzen

$$(2.8b)\quad \begin{cases} r_{\varrho\,\sigma}^{(k,i)} \equiv r_{\nu_k,\nu_k+\sigma-\varrho}^{(k,i)} - \sum_{\lambda=\varrho+1}^{\nu_k} a_\lambda^{(k)} r_{\nu_k,\lambda+\sigma-\varrho-1}^{(k,i)}(p) \\ \qquad\qquad (\sigma = 1, \ldots, \nu_k - 1;\ \varrho = \sigma, \ldots, \nu_k - 1) \\ r_{\varrho\,\sigma}^{(k,i)} \equiv d_{\sigma-\varrho}^{(k,i)} + \sum_{\lambda=1}^{\varrho} a_\lambda^{(k)} r_{\nu_k,\lambda+\sigma-\varrho-1}^{(k,i)}(p) \\ \qquad\qquad (\sigma = 2, \ldots, \nu_i;\ \varrho = 1, \ldots, \mathrm{Min}(\sigma-1, \nu_k)) \end{cases}$$

äquivalent sind mit (2.7a). Setzen wir nun (2.8b) in (2.8a) ein, so erhalten wir nach einigen Umformungen die Kongruenzen

$$(2.9)\quad \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{\nu_i-\nu_k} \sum_{\varrho=\mu+1}^{\nu_k} b_\lambda a_\varrho^{(k)} d_{\lambda-\mu+\varrho-1}^{(k,i)} - \sum_{\lambda=1}^{\nu_i-\nu_k} b_\lambda d_{\nu_k+\lambda-\mu}^{(k,i)} + \sum_{\varrho=\mu+1}^{\nu_k} a_\varrho^{(k)} d_{\varrho-\mu+\nu_i-\nu_k}^{(k,i)} \equiv \\ \qquad\qquad \equiv d_{\nu_i-\mu+1}^{(k,i)}(p) \quad (\mu = 1, \ldots, \nu_k). \end{cases}$$

Die Kongruenz (2.6) ist daher genau dann nach R_{ki} auflösbar, wenn die Elemente $d_\varrho^{(k,i)}$ der Matrix D_{ki} die Kongruenzen (2.9) erfüllen. Für die Indizes der $d_\lambda^{(k,i)}$ in den einzelnen Termen von (2.9) gilt der Reihe nach

$$\lambda - \mu + \varrho - 1 \leq \nu_i - \mu - 1; \quad \nu_k + \lambda - \mu \leq \nu_i - \mu; \quad \varrho - \mu + \nu_i - \nu_k \leq \nu_i - \mu$$

und daher folgt, daß sich bei beliebiger Vorgabe der Zahlen

$$d_1^{(k,i)}, \ldots, d_{\nu_i-\nu_k}^{(k,i)}$$

die Kongruenzen (2.9) sukzessiv nach den restlichen

$$d_{\nu_i-\nu_k+1}^{(k,i)}, \ldots, d_{\nu_i}^{(k,i)}$$

auflösen lassen. Es galt

$$C_{ik} \equiv -M_i^T D_{ki}^T (M_k^T)^{-1}(p).$$

Haben M_i und M_k die Gestalt (2.5), so gilt $M_i^T \equiv M_i$ und $M_k^T \equiv M_k$, daher

$$C_{ik} \equiv -M_i D_{ki}^T M_k(p),$$

woraus wir die Kongruenzen

$$c_{\mu}^{(i,k)} \equiv \sum_{\varrho=1}^{\nu_i-\mu} a_{\varrho+\mu}^{(i)} d_{\varrho}^{(k,i)} - d_{\nu_i-\mu+1}^{(k,i)} (p) \quad (\mu = 1, \ldots, \nu_i - 1)$$

$$c_{\nu_i}^{(i,k)} \equiv - d_1^{(k,i)} (p)$$

erhalten. Aus diesen lassen sich die $d_1^{(k,i)}, \ldots, d_{\nu_i-\nu_k}^{(k,i)}$ durch $c_{\nu_k+1}^{(i,k)}, \ldots, c_{\nu_i}^{(i,k)}$ ausdrücken, und diese nehmen alle Werte modulo p an, sofern die $d_1^{(k,i)}, \ldots, d_{\nu_i-\nu_k}^{(k,i)}$ alle Werte durchlaufen. Geben wir also die $c_{\nu_k+1}^{(i,k)}, \ldots, c_{\nu_i}^{(i,k)}$ beliebig vor, etwa durch $c_{\lambda}^{(i,k)} \equiv -\alpha_{\lambda}^{(i,k)} (p)$, so sind damit die $d_1^{(k,i)}, \ldots, d_{\nu_i-\nu_k}^{(k,i)}$ eindeutig bestimmt und wir können die restlichen $d_j^{(k,i)}$ so bestimmen, daß (2.9) erfüllt ist, womit die Lösbarkeit von (2.6) und damit auch von (2.3a) gewährleistet ist.

§ 3. Als Anwendung der bis jetzt gefundenen Resultate beweisen wir den Satz 3. *Alle Matrizen der Gestalt*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 1 & \ldots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & a_\nu \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_1' \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_\nu' \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

wobei $0 \leq a_k \leq p-1$ *und* $a_k' \in \mathfrak{R}_p$ *gilt, sind Normalformen über* $\mathfrak{R}_p$: *Jede Matrix über* $\mathfrak{R}_p$, *die modulo* p *genau einen Elementarteiler besitzt, ist zu genau einer der Matrizen* (3.1) *ähnlich, und jede Matrix* (3.1) *hat modulo* p *genau einen Elementarteiler.*

Zum Beweis seien gemäß Satz 1 zwei ähnliche Matrizen

$$A = A_0 + \cdots + p^{n-1} A_{n-1} + p^n A_n + \cdots = \bar{A} + p^n A_n + \cdots$$

$$B = A_0 + \cdots + p^{n-1} A_{n-1} + p^n B_n + \cdots = \bar{A} + p^n B_n + \cdots$$

in der Gestalt (1.7) vorgelegt. Nach Satz 2 haben nur diejenigen Transformationen T_0 auf A_n einen Einfluß, die der Bedingung

$$T_0 \bar{A} = \bar{A} T_0$$

genügen. Die Ergebnisse von D. E. RUTHERFORD [2] sind auf den vorliegenden Fall übertragbar, die allgemeinste Lösung hat die Gestalt $T_0 = x_1 E + \cdots + x_\nu (\bar{A})^{\nu-1}$, die durch die Forderung der Umkehrbarkeit noch gewissen Bedingungen unterliegt. Aus $T_0 A \equiv B T_0 (p^{n+1})$ erhalten wir dann $T_0 A_n \equiv B_n T_0 (p)$ oder

$$x_1 A_n + \cdots + x_\nu A_0^{\nu-1} A_n \equiv x_1 B_n + \cdots + x_\nu B_n A_0^{\nu-1} (p).$$

Nun ist mit

$$B_n \equiv \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \beta_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \beta_\nu \end{pmatrix} (p) \quad \text{und} \quad A_n \equiv \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_\nu \end{pmatrix} (p)$$

offenbar

$$B_n A_0^{\varrho} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \beta_1 & x & \dots & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \beta_\nu & x & \dots & x \end{pmatrix} (\mathfrak{p}) \quad \text{und} \quad A_0^{\varrho} \cdot A_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \gamma_1^{(\varrho)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_\nu^{(\varrho)} \end{pmatrix} (\mathfrak{p}).$$

1. Sp. $(\nu-\varrho)$. Sp.

Betrachten wir die erste Spalte in (3.2), so tritt sie nur auf der rechten Seite im letzten Term als von Null verschieden auf. Aus ihr folgt

$$x_\nu \beta_\lambda \equiv 0 (\mathfrak{p}) \qquad (\lambda = 1, \dots, \nu). \tag{3.3}$$

Ist $B_n \equiv 0 (\mathfrak{p})$, so folgt aus (3.2) auch $A_n \equiv 0 (\mathfrak{p})$ und umgekehrt. Daher dürfen wir $B_n \not\equiv 0 (\mathfrak{p})$ voraussetzen. Damit folgt aus (3.3)

$$x_\nu \equiv 0 (\mathfrak{p}).$$

Betrachten wir genau so die 2., 3., ..., $(\nu-1)$. Spalte, so erhalten wir

$$x_2 \equiv \dots \equiv x_\nu \equiv 0 (\mathfrak{p}).$$

Daher muß

$$x_1 A_n \equiv x_1 B_n (\mathfrak{p})$$

gelten. Wegen der Existenz von T_0^{-1} muß nun $x_1 \not\equiv 0 (\mathfrak{p})$ sein, daher ergibt sich

$$A_n \equiv B_n (\mathfrak{p}),$$

wenn es überhaupt eine Matrix T geben soll, die A in B transformiert. Durch vollständige Induktion nach n erhalten wir schließlich die gewünschte Aussage.

Für zweireihige unimodulare Matrizen mod $\mathfrak{p}^2$ hat H. Rohrbach ([3], §§ 2,12) Normalformen angegeben. Wir bestimmen nun die Normalformen der zweireihigen invertierbaren Matrizen über $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$.

Satz 4. *Jede zweireihige invertierbare Matrix über $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ hat eine der Matrizen*

$$R = r_1 I + \mathfrak{p} r_2 I + \dots + \mathfrak{p}^{k-1} r_k I + \mathfrak{p}^k S \tag{3.4}$$

mit

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ 1 & s_2 \end{pmatrix}$$

und

$$0 < r_1 < \mathfrak{p}, \quad 0 \leqq r_i < \mathfrak{p} \ (i = 2, \dots, k), \quad s_1 \in \mathfrak{R}_\mathfrak{p}, \quad s_2 \in \mathfrak{R}_\mathfrak{p} \ (s_1 \not\equiv 0 (\mathfrak{p}) \text{ falls } k = 0),$$

wobei k die Werte 0, 1, 2, ... annehmen kann, zur Normalform. Jede Matrix (3.4) *ist eine Normalform über $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$.*

Beweis. Es sei eine zweireihige invertierbare Matrix A über $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ vorgelegt. Besitzt A einen quadratischen Elementarteiler mod $\mathfrak{p}$, so gibt Satz 3 die möglichen Normalformen von A in Übereinstimmung mit Satz 4 $(k = 0)$ an. Wir können also A von der Gestalt

$$A = r_1 I + \mathfrak{p} A_1$$

voraussetzen. Nach Satz 2 brauchen wir A nur mit einer mit $r_1 I$ vertauschbaren Matrix T_1 zu transformieren, um die Normalform mod $\mathfrak{p}^2$ von A zu erhalten. Für jedes T_1 gilt $T_1 \cdot r_1 I = r_1 I \cdot T_1$ und daher erhalten wir

$$T_1 A T_1^{-1} = r_1 I + \mathfrak{p} T_1 A_1 T_1^{-1}.$$

Durch geeignete Wahl von T_1 können wir eine der beiden Formen erreichen:

$$A' = T_1 A T_1^{-1} = r_1 I + \mathfrak{p} r_2 I + \mathfrak{p}^2 A_2$$

bzw.

$$A'' = T_1 A T_1^{-1} = r_1 I + \mathfrak{p} \begin{pmatrix} 0 & \bar{s}_1 \\ 1 & \bar{s}_2 \end{pmatrix} + \mathfrak{p}^2 A_2 \qquad (0 \leq \bar{s}_1,\ \bar{s}_2 \leq \mathfrak{p} - 1).$$

Im letzten Fall können wir die Beweismethode von Satz 3 auf $A'' - r_1 I$ anwenden und erhalten als Normalformen

$$r_1 I + \mathfrak{p} \begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ 1 & s_2 \end{pmatrix} \qquad (s_1, s_2 \in \mathfrak{R}_\mathfrak{p}).$$

Im ersten Fall transformieren wir A weiter:

$$T_2 A' T_2^{-1} = r_1 I + \mathfrak{p} r_2 I + \mathfrak{p}^2 T_2 A_2 T_2^{-1}.$$

Wir können wie oben schließen und erhalten so die Normalformen mod $\mathfrak{p}^3$. Durch vollständige Induktion ergibt sich die erste Aussage von Satz 4.

Seien nun zwei Matrizen

$$R' = (r_1' + \cdots + \mathfrak{p}^{k'-1} r_{k'}')\ I + \mathfrak{p}^{k'} S'$$
$$R'' = (r_1'' + \cdots + \mathfrak{p}^{k''-1} r_{k''}'')\ I + \mathfrak{p}^{k''} S''$$

mit $k' \leqq k''$ vorgelegt und gelte

$$T R' T^{-1} = R'',$$

so folgt sofort

$$r_i' = r_i'' \text{ für } i = 1, \ldots, k'$$

und daher

$$T S' T^{-1} = (r_{k'+1}'' + \cdots + \mathfrak{p}^{k''-k'-1} r_{k''}'')\ I + \mathfrak{p}^{k''-k'} S''.$$

Hieraus würde aber

$$T S' T^{-1} \equiv c I\ (\mathfrak{p}^{k''-k'}) \qquad (c \in \mathfrak{R}_\mathfrak{p})$$

folgen. Ist $c \neq 0$, so haben wir einen Widerspruch erhalten, da S' z. B. modulo $\mathfrak{p}$ genommen eine Normalform ist, daher muß $k'' = k'$ sein. Ist $c = 0$, so würde $S' \equiv 0\,(\mathfrak{p})$ folgen, was nicht möglich ist. Mit $k'' = k'$ erhalten wir dann $T S' T^{-1} = S''$, was nach Satz 3 $S'' = S'$ nach sich zieht.

Corollar. *Die Klassenzahl der Automorphismengruppe* $\mathfrak{A}(\mathfrak{p}^{n+1}, \mathfrak{p}^{n+1})$ $(n \geqq 0)$ *der abelschen Gruppe vom Typus* $(\mathfrak{p}^{n+1}, \mathfrak{p}^{n+1})$ *beträgt* $\mathfrak{p}^n(\mathfrak{p}^{n+2} - 1)$. Da die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}(\mathfrak{p}^{n+1}, \mathfrak{p}^{n+1})$ aus allen zweireihigen invertierbaren Matrizen mod $\mathfrak{p}^{n+1}$ besteht, brauchen wir nur die Normalformen (3.4)

modulo p^{n+1} genommen abzuzählen. Für jeweils festes k lassen sich diese Zahlen leicht ermitteln. Wir erhalten für

$$\begin{aligned} k = 0\,(s_1 \not\equiv 0(p)): &\quad (p-1)\,p^{2n+1} \\ k = 1, \ldots, n \quad\; : &\quad (p-1)\,p^{2n+1-k} \\ k = n+1 \quad\; : &\quad (p-1)\,p^{n}. \end{aligned}$$

Die Summe ergibt offenbar $p^n(p^{n+2}-1)$. Zum Vergleich beträgt die Ordnung der $\mathfrak{A}(p^{n+1}, p^{n+1})$ $p^{4n+1}(p^2-1)\,(p-1)$. In der Einleitung hatten wir als Beispiel den Fall $n=1$, $p=2$ angeführt.

Literatur.

[1] Schreier, O., u. E. Sperner: Vorlesungen über Matrizen. Leipzig 1932. — [2] Rutherford, D. E.: On the rational commutant of a square matrix. Proc. Amsterdam **35**, 871 (1932). — [3] Rohrbach, H.: Die Charaktere der binären Kongruenzgruppen mod p^2. Schr. d. math. Seminars u. Inst. f. angew. Math. Univ. Berlin **1**, 33 (1932/33).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 16. Mai 1952.)

Dürbaum, H.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 86—93 (1952)

Über die Ganzheitsbereiche bewerteter Körper.

Von
Hansjürgen Dürbaum.

1. Problemstellung und Definitionen.

Die Einteilung der Bewertungen in archimedische und nichtarchimedische ist bekanntlich mehr als eine bloße Klassifikation: archimedische und nichtarchimedische Bewertungen haben vielmehr verschiedenartige Strukturen. Viele Sätze der Bewertungstheorie sind daher bisher für beide Typen von Bewertungen getrennt formuliert oder doch wenigstens getrennt bewiesen worden.

Das führt zu der Frage, ob man nicht durch geeignete Begriffsbildungen und Beweismethoden eine Vereinheitlichung der Bewertungstheorie erreichen kann. Erste Schritte in dieser Richtung haben Artin-Whaples [*1*] und Kaplansky [*3*] getan. Von Artin und Whaples wurde dabei die axiomatische Untersuchungsmethode, von Kaplansky der Begriff der Topologie vom Bewertungstyp und topologische Beweismethoden als Hilfsmittel herangezogen. Als weiterer Schritt ist die Arbeit von F. K. Schmidt und G. Preuss [*7*] über den Hilbertschen Irreduzibilitätssatz zu werten. Dort tritt auch zum ersten Male der Begriff der *Halbordnung* oder *Fastordnung* auf, der unter anderem auch eine einheitliche Untersuchung der Ganzheitsbereiche von Bewertungen erlaubt. Diese wird in der vorliegenden Arbeit durchgeführt und damit eine einheitliche Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von Krull [*4*] erzielt, der besagt: Eine Ordnung eines Körpers ist genau dann Ganzheitsbereich einer nichtarchimedischen Bewertung, wenn sie maximal ist.

Wir beginnen mit der grundlegenden Definition der Fastordnung.

Definition. Ein in einem Schiefkörper $\mathfrak{K}$ enthaltener Teilbereich $\mathfrak{o}$ heißt ein *Halbring*, wenn

(F 1) $0, \pm 1 \in \mathfrak{o}$,

(F 2) $a \cdot b \in \mathfrak{o}$, falls $a, b \in \mathfrak{o}$,

(F 3) es von 0 verschiedene Elemente z, z' in $\mathfrak{o}$ gibt, so daß
$z(\mathfrak{o}+\mathfrak{o}) \subseteq \mathfrak{o}$ und $(\mathfrak{o}+\mathfrak{o})z' \subseteq \mathfrak{o}$.

$\mathfrak{o}$ heißt ein *invarianter Halbring*, wenn außerdem

(F 4) $a\,b\,a^{-1} \in \mathfrak{o}$ für $b \in \mathfrak{o}$ und $a \in \mathfrak{K}$.

Ein Halbring $\mathfrak{o}$ heißt eine *Halbordnung* oder *Fastordnung*, wenn jedes Element aus $\mathfrak{K}$ als Quotient zweier Elemente von $\mathfrak{o}$ dargestellt werden kann, wenn also zusätzlich zu (F 1) bis (F 3) noch

(F 5) $\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{o}^{\times -1} \cup \mathfrak{o}^{\times -1} \cdot \mathfrak{o} = \mathfrak{K}$

erfüllt ist. Spezielle Fastordnungen sind die *Vollfastordnungen*, die außer den Halbringseigenschaften noch die Eigenschaft

(F 6) $a \in \mathfrak{o}$ oder $a^{-1} \in \mathfrak{o}$ für alle $a \in \mathfrak{K}$

haben.

Bemerkungen zu der Definition. Die Begriffe des Halbringes und der Fastordnung sind Verallgemeinerungen des Begriffes des Ringes bzw. der Ordnung. Ein Halbring bzw. eine Fastordnung ist genau dann ein Ring bzw. eine Ordnung, wenn für $\mathfrak{o}$ (F 3) mit $z = z' = 1$ erfüllt ist. Die Elemente z, z' aus (F 3) nennen wir ihrer Eigenschaften wegen *Links-* bzw. *Rechts-2-Addiatoren*.

2. Ergebnisse.

Der Ganzheitsbereich einer Bewertung q von $\mathfrak{K}$, d.h. die Menge der Elemente $a \in \mathfrak{K}$ mit $q(a) \leqq 1$, ist im allgemeinen keine Ordnung von $\mathfrak{K}$. Ein einfaches Beispiel liefert die Bewertung des rationalen Zahlkörpers durch den gewöhnlichen absoluten Betrag. Die rationalen Zahlen vom Betrage $\leqq 1$, allgemein die hinsichtlich einer Bewertung ganzen Elemente eines Körpers bilden aber stets eine Fastordnung.

Man kann daher fragen, ob die Ganzheitsbereiche archimedischer und nichtarchimedischer Bewertungen sich einheitlich dadurch kennzeichnen lassen, daß man an Stelle der Maximalordnungen maximale Fastordnungen betrachtet. Die Menge der ganzen Elemente eines bewerteten Körpers ist stets schon als multiplikative Halbgruppe maximal, d.h.: Nimmt man ein Element a des Körpers mit $q(a) > 1$ hinzu und schließt dann multiplikativ ab, so bekommt man den ganzen Körper.

Wir können aber auch umgekehrt zeigen, daß jede maximale Fastordnung eines Körpers Ganzheitsbereich einer Bewertung ist. Es gilt also der

Satz 1. *Die Ganzheitsbereiche gewöhnlicher Bewertungen eines Körpers sind genau die maximalen Fastordnungen.*

Der *Beweis* ergibt sich durch Verallgemeinerung der KRULLschen Überlegungen zur arithmetischen Charakterisierung der Maximalordnungen. Er zerfällt in drei Teile. Zunächst untersuchen wir die Erweiterung einer Fastordnung durch Adjunktion eines Elementes. Mit ihrer Hilfe wird im zweiten Teil gezeigt, daß jede maximale Fastordnung eine Vollfastordnung ist. Im dritten Teil folgt dann der Nachweis dafür, daß jede maximale Vollfastordnung zu einer Bewertung des Körpers Anlaß gibt, dessen Ganzheitsbereich sie ist. In diesem Teil wird wesentlich von einem ARTINschen Satz Gebrauch gemacht, der aussagt, daß eine Potenz einer in einem Körper erklärten reellen Funktion schon eine Bewertung ist, wenn die Funktion alle Bewertungspostulate mit Ausnahme der Dreiecksungleichung erfüllt und die Addition hinsichtlich der durch die Funktion im Körper erklärten Topologie stetig ist.

Beim Beweis dafür, daß eine maximale Fastordnung eines Körpers eine Vollfastordnung ist, wird übrigens nicht die volle Maximalität als Fastordnung gebraucht, sondern nur die Maximalität als „$\mathfrak{z}$-Fastordnung", wenn $\mathfrak{z}$ irgendeine feste Menge von Addiatoren der Fastordnung ist. Diese Bemerkung ist

für die Konstruktion von Vollfastordnungen wichtig. Die Vereinigung einer Folge ineinandergeschachtelter Fastordnungen braucht nämlich im allgemeinen keine Fastordnung zu sein, während dies für eine Folge ineinandergeschachtelter $\mathfrak{z}$-Fastordnungen stets der Fall ist.

Unter Benutzung der OSTROWSKIschen Ergebnisse und des oben erwähnten Satzes von ARTIN ergibt sich aus Satz 1 die

Folgerung. *Die einzige maximale Fastordnung des rationalen Zahlkörpers, die keine Ordnung ist, ist die Menge der rationalen Zahlen vom Betrage* $\leqq 1$.

Der Satz 1 läßt sich unter Verwendung derselben Schlüsse sofort auf das Nichtkommutative verallgemeinern. Es ergibt sich so der

Satz 2. *Eine invariante Fastordnung* $\mathfrak{o}$ *eines Schiefkörpers* $\mathfrak{K}$ *ist genau dann Ganzheitsbereich einer Bewertung von* $\mathfrak{K}$, *wenn* $\mathfrak{o}$ *als Fastordnung maximal ist.*

Dieser Satz kann jedoch nicht wie Satz 1 im kommutativen Spezialfall in einfacher Weise zur Konstruktion von invarianten Vollfastordnungen ausgenutzt werden. Anders wäre es, wenn sich die invarianten Fastordnungen, die als invariante maximal sind, bereits als Ganzheitsbereiche von Bewertungen erweisen würden. Dies ist nicht der Fall, wie aus der folgenden Bemerkung hervorgeht.

Zusatz zu Satz 2. *Es gibt maximale invariante Fastordnungen (sogar Ordnungen) in Schiefkörpern, die nicht Ganzheitsbereiche gewöhnlicher Bewertungen sind.*

Es bleibt also die Frage nach einer konstruktiveren Charakterisierung der Bewertungsfastordnungen von Schiefkörpern noch offen. Es ist auch zu hoffen, daß sich gleichzeitig die Frage erledigen läßt, ob es maximale invariante Fastordnungen gibt, die keine Vollfastordnungen sind. Letzteres wird durch den unter 5. gegebenen Beweis des Zusatzes nicht ausgeschlossen.

3. Moduln in bezug auf einen Fastring, Erweiterung von Fastringen.

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 1 müssen wir uns mit Erweiterungen von Fastordnungen innerhalb des fest vorgegebenen Quotientenkörpers $\mathfrak{K}$ beschäftigen. Wir beginnen mit einer kurzen Betrachtung der Durchschnitte von Fastordnungen.

Der Durchschnitt von Fastordnungen ist nicht immer eine Fastordnung: Die p-adischen Bewertungsringe und der zum absoluten Betrag gehörige Ganzheitsbereich des rationalen Zahlkörpers haben als Durchschnitt allein die Elemente 0, $+1$ und -1. Auch die Alternative: Der Durchschnitt ist eine Fastordnung oder die von 0 verschiedenen Elemente des Durchschnitts bilden eine multiplikative Gruppe, wird durch das folgende Beispiel widerlegt. $\mathfrak{o}_m$ sei die Fastordnung des rationalen Zahlkörpers, die besteht aus (1) der Halbgruppe aller Potenzen $\pm a^\mu$ einer festen ganzen Zahl $a > 1$ mit nichtnegativen ganzen Exponenten und (2) allen ganzen Zahlen, die durch die ganze Zahl $m > 1$ teilbar sind. (m und alle $\mathfrak{o}_m$-Vielfachen von m sind Addiatoren von $\mathfrak{o}_m$.)

Der Durchschnitt der Fastordnungen $\mathfrak{o}_m$, wenn m die ganzen Zahlen >1 durchläuft, besteht gerade aus den unter (1) beschriebenen rationalen Zahlen und der Null. Diese Menge ist weder eine Fastordnung, noch bilden ihre von 0 verschiedenen Elemente eine multiplikative Gruppe.

Es ist daher nicht möglich, ohne Bezugnahme auf die Addiatoren der Fastordnung $\mathfrak{o}$ zu erklären: Die durch Adjunktion eines Elementes a von $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{o}$ erweiterte Fastordnung $\mathfrak{o}[a]$ soll der Durchschnitt aller $\mathfrak{o}$ und a enthaltenden Fastordnungen von $\mathfrak{R}$ sein. Dies ist der Grund dafür, daß wir eine neue Definition einführen ($\mathfrak{z}$ bedeute dabei eine Teilmenge der Menge $\mathfrak{z}_\mathfrak{o}$ aller Addiatoren von $\mathfrak{o}$):

Definition. *Die durch $\mathfrak{z}$-Adjunktion eines Elementes $a \in \mathfrak{R}$ zu der Fastordnung $\mathfrak{o}$ aus $\mathfrak{R}$ erhaltene Fastordnung* $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a]$ soll der Durchschnitt aller Fastordnungen von $\mathfrak{R}$ sein, die $\mathfrak{o}$ und a umfassen und die Elemente von $\mathfrak{z}$ zu Addiatoren besitzen.

Nennt man kurz eine Fastordnung $\subseteq \mathfrak{R}$, die die Elemente von $\mathfrak{z}$ zu Addiatoren besitzt, eine $\mathfrak{z}$-*Fastordnung* von $\mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a]$ der Durchschnitt aller $\mathfrak{o}$ und a umfassenden $\mathfrak{z}$-Fastordnungen.

Ganz entsprechend erklären wir:

Definition. Eine Teilmenge $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{R}$ heißt ein $\mathfrak{o}, \mathfrak{z}$-*Modul*, wenn $\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{z}(\mathfrak{m}+\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}$ gilt.

Unter dem *durch ein System* $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{R}$ *erzeugten* $\mathfrak{o}, \mathfrak{z}$-*Modul* $(\mathfrak{s})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ verstehen wir den Durchschnitt aller $\mathfrak{o}, \mathfrak{z}$-Moduln, die $\mathfrak{s}$ enthalten.

Wir wollen nun eine *induktive Übersicht über die Elemente des* $\mathfrak{o}, \mathfrak{z}$-*Moduls* $(\mathfrak{s})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ *und daran anschließend über die Elemente der Fastordnung* $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a]$ gewinnen. Sie spielt beim Beweis von Satz 1 eine entscheidende Rolle.

Hilfssatz 1. Setzt man $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{o} \cdot \mathfrak{s}$ und für jede natürliche Zahl μ $\mathfrak{S}_\mu = \mathfrak{S}_{\mu-1} \cup \mathfrak{z}(\mathfrak{S}_{\mu-1} + \mathfrak{S}_{\mu-1})$, so gilt $(\mathfrak{s})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}} = \bigcup_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{S}_\mu$. Ist das System $\mathfrak{s}$ eine multiplikative Halbgruppe, die ± 1 enthält, so ist $(\mathfrak{s})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ sogar eine $\mathfrak{z}$-Fastordnung $\supseteq \mathfrak{o}$.

Wegen $\mathfrak{S}_\mu \subseteq (\mathfrak{s})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ für jedes μ ist die Gleichung $(\mathfrak{s})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}} = \bigcup_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{S}_\mu$ bewiesen, sobald $\bigcup_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{S}_\mu$ als $\mathfrak{o}, \mathfrak{z}$-Modul erkannt ist. Nun ergibt sich aber durch Induktion nach μ sofort $\mathfrak{o}\,\mathfrak{S}_\mu \subseteq \mathfrak{S}_\mu$ und $\mathfrak{z}(\mathfrak{S}_{\mu-1} + \mathfrak{S}_{\mu-1}) \subseteq \mathfrak{S}_\mu$. Wegen $\mathfrak{S}_{\mu-1} \subseteq \mathfrak{S}_\mu$ ist daher $\bigcup_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{S}_\mu$ wirklich ein $\mathfrak{o}, \mathfrak{z}$-Modul.

Stellt $\mathfrak{s}$ eine multiplikative Halbgruppe dar, so schließt man induktiv weiter, daß $\mathfrak{S}_\mu \cdot \mathfrak{S}_\mu \subseteq (\mathfrak{s})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ ist, wobei man insbesondere die Beziehung

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{S}_{\mu-1} + \mathfrak{S}_{\mu-1}) \cdot \mathfrak{z}(\mathfrak{S}_{\mu-1} + \mathfrak{S}_{\mu-1}) \subseteq$$
$$\subseteq \mathfrak{z}[\mathfrak{z}(\mathfrak{S}_{\mu-1}\,\mathfrak{S}_{\mu-1} + \mathfrak{S}_{\mu-1}\,\mathfrak{S}_{\mu-1}) + \mathfrak{z}(\mathfrak{S}_{\mu-1} \cdot \mathfrak{S}_{\mu-1} + \mathfrak{S}_{\mu-1} \cdot \mathfrak{S}_{\mu-1})]$$

zu beachten hat.

Aus dem ersten Teil von Hilfssatz 1 ergibt sich die

Folgerung 1. Für ein beliebiges $\xi \in \mathfrak{R}$ gilt $(\mathfrak{s})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}} \cdot \xi = (\mathfrak{s} \cdot \xi)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$.

Aus dem zweiten Teil von Hilfssatz 1 entnimmt man

Folgerung 2. Setzt man $\mathfrak{s}$ gleich der multiplikativen Halbgruppe der Elemente $\pm a^{\mu}$ mit nichtnegativem μ, so ist

$$(\mathfrak{s})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{z}}[a].$$

Zu einem festen Element $b \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{z}}[a]$ gibt es daher immer einen geeigneten endlichen Abschnitt $\mathfrak{s}'$ der Folge $\mathfrak{s} = \{\pm a^{\mu}\}$, so daß schon $b \in (\mathfrak{s}')_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ gilt. Wir benutzen im folgenden für den endlichen Abschnitt, der mit dem n-ten Gliede abbricht, die Abkürzung $\{\pm a^{\mu}\}_n$, während $\{\pm a^{\mu}\}$ immer die volle Folge bedeutet.

Wir ziehen noch die weitere einfache

Folgerung 3. Ist $a^{m+1} \in (\{\pm a^{\mu}\}_m)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$, so ist $\mathfrak{o}_{\mathfrak{z}}[a] = (\{\pm a^{\mu}\}_m)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$.

Sie ergibt sich aus Hilfssatz 1 durch dieselben trivialen Überlegungen, die zu der Folgerung 1 führen. Sie besagt, daß *der Modul* $\mathfrak{o}_{\mathfrak{z}}[a] = (\{\pm a^{\mu}\})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ *schon ein endliches Erzeugendensystem besitzt, wenn* a *von* $\mathfrak{o}$ *„ganz abhängig" ist.*

Schließlich ergibt sich aus Folgerung 1

Hilfssatz 2. Ist das Element $b \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{z}}[a]$ bereits in $(\{\pm a^{\mu}\}_n)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ enthalten und besteht für das Element $\xi \in \mathfrak{o}$ die Beziehung $a^{\mu} \cdot \xi \in \mathfrak{o}$ für alle μ mit $1 \leqq \mu \leqq n$, so liegt auch $b\,\xi$ in $\mathfrak{o}$.

Offenbar ist nämlich

$$b \cdot \xi \in (\{\pm a^{\mu}\}_n)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}} \cdot \xi = (\{\pm a^{\mu}\,\xi\}_n)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}} \leqq \mathfrak{o}.$$

Bemerkung 1. Die den voranstehenden im Nichtkommutativen entsprechenden Hilfssätze und Folgerungen lassen sich ebenso herleiten, wenn $\mathfrak{o}$ eine invariante Fastordnung und die benutzte Menge $\mathfrak{z}$ der Addiatoren invariant ist.

Bemerkung 2. Die Addition in einer Fastordnung $\mathfrak{o}$ ist insofern nichtassoziativ, als man z. B. (z ein Addiator von $\mathfrak{o}$, ω_i Elemente aus $\mathfrak{o}$) wohl schließen kann, daß $(z\,\omega_1 + (z^2\,\omega_2 + z^2\,\omega_3))$ in $\mathfrak{o}$ liegt, aber nicht, daß $((z\,\omega_1 + z^2\,\omega_2) + z^2\,\omega_3)$ in $\mathfrak{o}$ liegt. Diese Nichtassoziativität ist der Grund dafür, daß man nur eine induktive Übersicht über die Elemente von $\mathfrak{o}_{\mathfrak{z}}[a]$ gewinnen kann.

4. Charakterisierung der Ganzheitsbereiche bewerteter Körper.

Wir können nun den Beweis von Satz 1 ohne Schwierigkeiten führen. Um ihn übersichtlich zu gestalten, stellen wir dem eigentlichen Beweis noch den folgenden Hilfssatz voran:

Hilfssatz 3. $\mathfrak{o}$ sei eine Fastordnung von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{z}$ eine Menge von Addiatoren und $\mathfrak{o}$ maximale $\mathfrak{z}$-Fastordnung in $\mathfrak{R}$, d. h. es gibt keine $\mathfrak{o}$ umfassende, von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{R}$ verschiedene Fastordnung in $\mathfrak{R}$, die die Elemente von $\mathfrak{z}$ als Addiatoren besitzt. Ist dann $\xi \in \mathfrak{o}$ eine Nichteinheit, $\eta \in \mathfrak{R}$ beliebig, so liegt $\eta\,\xi^{\varrho}$ in $\mathfrak{o}$ für ein geeignetes positives ϱ.

Beweis. Da $\xi^{-1} \notin \mathfrak{o}$, ist $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[\xi^{-1}] = \mathfrak{K}$, $\eta \in \mathfrak{o}_\mathfrak{z}[\xi^{-1}]$. Auf Grund unserer Betrachtungen im dritten Abschnitt liegt dann η sogar schon in $(\{\pm \xi^{-\mu}\}_\varrho)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ für ein geeignetes ϱ. Nach Hilfssatz 2 liegt $\eta\,\xi^\varrho$ in $\mathfrak{o}$, q. e. d.

Die Aussage des Hilfssatzes ist, daß man ein und damit auch endlich viele Elemente aus $\mathfrak{K}$ durch Multiplikation mit einer genügend hohen Potenz einer gegebenen Nichteinheit in $\mathfrak{o}$ hineinziehen kann.

Zum Beweis der in Satz 1 angegebenen Charakterisierung zeigen wir nun zunächst: Eine als $\mathfrak{z}$-Fastordnung maximale Fastordnung $\mathfrak{o}$ eines Körpers $\mathfrak{K}$ ist eine Vollfastordnung.

Wir führen die Annahme, $\mathfrak{o}$ sei keine Vollfastordnung, zum Widerspruch. Aus dieser Annahme folgt, daß es in $\mathfrak{K}$ ein Element a gibt, so daß weder a noch a^{-1} in $\mathfrak{o}$ liegt. Dann stimmt sowohl $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a]$ als auch $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a^{-1}]$ mit $\mathfrak{K}$ überein.

Wir benutzen zunächst die letzte Beziehung $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a^{-1}] = \mathfrak{K}$. Sie hat zur Folge, daß a in $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a^{-1}]$ liegt, d. h. daß es ein m gibt, so daß $a \in (\{\pm a^{-\mu}\}_m)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$. Wir können hieraus mit Hilfe von Folgerung 1 schließen, daß $a^{m+1} \in (\{\pm a^\mu\}_m)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ und dann ergibt sich aus Folgerung 3, daß $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a] = (\{\pm a^\mu\}_m)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ ist.

Nun gilt aber nach Voraussetzung, daß auch $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a] = \mathfrak{K}$ ist, so daß alle Elemente $\eta \in \mathfrak{K}$ in dem endlich-erzeugten Modul $(\{\pm a^\mu\}_m)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ enthalten sind.

Sei jetzt ξ^ϱ die nach Hilfssatz 3 existierende Potenz einer Nichteinheit ξ von $\mathfrak{o}$, für welche $a^\mu \xi^\varrho \in \mathfrak{o}$ für alle μ, $1 \leq \mu \leq m$. Nach Hilfssatz 2 liegt dann $\eta\,\xi^\varrho$ in $\mathfrak{o}$ für alle η aus $\mathfrak{K}$. Es gibt aber Elemente in $\mathfrak{K}$, die nicht durch Multiplikation mit ξ^ϱ in $\mathfrak{o}$ hineingeholt werden können, z. B. $\xi^{-\varrho-1}$. Widerspruch!

Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{o}$ eine Vollfastordnung ist. Wir bilden nun (s. auch Krull [5, S. 165]) die Faktorgruppe der multiplikativen Gruppe $\mathfrak{K}^\times$ des Körpers nach der Gruppe $\mathfrak{E}_\mathfrak{o}$ der Einheiten von $\mathfrak{o}$ (der Elemente $a \in \mathfrak{o}$, für die auch $a^{-1} \in \mathfrak{o}$). Durch die Festsetzung

$$\alpha \leq \beta = {}_{Df}\, a\, b^{-1} \in \mathfrak{o},$$

wobei a bzw. b ein Repräsentant der Restklasse α bzw. β ist, wird $\mathfrak{K}^\times/\mathfrak{E}_\mathfrak{o}$ zu einer voll und streng angeordneten Gruppe. Die Abbildung, die einem Element $a \in \mathfrak{K}^\times$ seine Restklasse mod $\mathfrak{E}_\mathfrak{o}$ zuordnet, sei mit $\varphi_\mathfrak{o}$ bezeichnet. Mit Hilfe dieser Abbildung sieht man sofort, daß die Gruppe $\mathfrak{K}^\times/\mathfrak{E}_\mathfrak{o}$ archimedisch geordnet, also isomorph zu einer Untergruppe der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen ist. Denn ist $\varphi_\mathfrak{o}(\xi) < 1$ und $\varphi_\mathfrak{o}(\xi') < 1$, sind also ξ und ξ' zwei Nichteinheiten von $\mathfrak{o}$, so gibt es nach dem Hilfssatz 3 eine Potenz ξ^ϱ von ξ, so daß $\varphi_\mathfrak{o}(\xi)^\varrho \leq \varphi_\mathfrak{o}(\xi')$, und ebenso eine Potenz $\xi'^{\varrho'}$ von ξ', so daß $\varphi_\mathfrak{o}(\xi')^{\varrho'} \leq \varphi_\mathfrak{o}(\xi)$.

Faßt man daher die Elemente von $\mathfrak{K}^\times/\mathfrak{E}_\mathfrak{o}$ als reelle Zahlen auf, so hat man durch die Ergänzung $\varphi_\mathfrak{o}(0) = 0$ in $\varphi_\mathfrak{o}$ eine reelle Funktion in $\mathfrak{K}$, die alle Eigenschaften einer Bewertung hat, eventuell mit Ausnahme der Dreiecksungleichung, und deren „Ganzheitsbereich" $\mathfrak{o}$ ist. Um Satz 1 vollständig zu beweisen, brauchen wir nach dem in der Einleitung erwähnten Artinschen Satz nur noch die Stetigkeit der Addition bei der durch $\varphi_\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{K}$ erklärten Topologie zu zeigen. Nun ist aber die Stetigkeit in jedem Punkte schon

gezeigt, wenn man sie nur im Nullpunkt gezeigt hat, da das System der $\{a + \mathfrak{o}\, x\}_{a,\, x \in \mathfrak{R},\, x \neq 0}$ ein vollständiges Umgebungssystem bei dieser Topologie ist. Die Stetigkeit im Nullpunkt bedeutet, daß es zu einer Umgebung $\mathfrak{o} \cdot x$ der Null eine Umgebung $\mathfrak{o} \cdot y$ gibt, so daß $\mathfrak{o}\, y + \mathfrak{o}\, y \subseteq \mathfrak{o}\, x$. Dies ist aber eine unmittelbare Folge aus der Eigenschaft (F 3) der Fastordnung $\mathfrak{o}$.

5. Beweis des Zusatzes zu Satz 2.

B. H. NEUMANN hat in seiner Arbeit über geordnete Schiefkörper [6] bewiesen, daß es zu einer vorgegebenen voll und streng geordneten Gruppe $\mathfrak{G}$ stets einen Schiefkörper, nämlich einen formalen Potenzreihenschiefkörper, gibt, der eine nichtkommutative Bewertung [8] mit genau der Wertgruppe $\mathfrak{G}$ besitzt. Auf Grund dieser Tatsache kann man sich zum Beweis des Zusatzes darauf beschränken, ein Beispiel für eine geordnete Gruppe anzugeben, in welcher die Transformierten eines beliebigen Elementes $a > 1$ unbeschränkt sind. Denn dann ist die Menge der Gruppenelemente $a \leqq 1$ eine maximale invariante multiplikative Halbgruppe in $\mathfrak{G}$ und daher auch der Bewertungsring in dem zu $\mathfrak{G}$ konstruierten Potenzreihenschiefkörper eine maximale invariante Ordnung, obwohl die zugehörige Bewertung keine gewöhnliche, sondern eine nichtkommutative Bewertung ist (sogar unendlichen Ranges).

Ein Beispiel für eine solche geordnete Gruppe bekommt man durch Abänderung aus einem Beispiel für eine geordnete Gruppe, das K. IWASAWA [8, S. 8] angegeben hat.

Die Gruppenelemente sind die im Intervall $[0, 1]$ erklärten und stetigen reellen Funktionen $f(x)$, die die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

(a) $f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$

(b) Die die Funktion darstellende Kurve ist ein Streckenzug, dessen Strecken alle positive Steigung haben.

(c) Es gibt ein positives λ, so daß $f(x)$ für alle $x \leqq \lambda$ mit x übereinstimmt, aber $f(x) \neq x$ für $\lambda < x < \lambda + \varepsilon$ bei hinreichend kleinem ε. [Dieses λ wollen wir die charakteristische Zahl von $f(x)$ nennen.]

Die Gruppenoperation sei die Einsetzung. Die Ordnung wird folgendermaßen erklärt:

$f(x) > g(x) =_{Df}$ es gibt ein positives $a < 1$, so daß $f(x) = g(x)$ für alle $0 \leqq x \leqq a$, aber für ein geeignetes ε' $f(x) > g(x)$ für $a < x < a + \varepsilon'$.

Es ist aus dieser Erklärung ersichtlich, daß die charakteristische Zahl der Funktion $f(x)$ gerade die Größenordnung angibt und zwei Funktionen nur dann im archimedischen Sinne miteinander vergleichbar sind, wenn sie dieselbe charakteristische Zahl besitzen. Eine „positive" Funktion $f(x)$ ist bezüglich der erklärten Ordnung „unendlich groß" gegenüber einer anderen $g(x)$, falls $\lambda(f) < \lambda(g)$ ist.

Wir zeigen nun, daß die charakteristische Zahl der mit $g(x)$ transformierten Funktion $f(x)$ die reelle Zahl $g(\lambda(f))$ ist. Da man nun $g(x)$ stets so wählen kann, daß bei festem $\lambda(f) = \lambda\, g(\lambda)$ beliebig klein ist, so ist dann bewiesen, daß man ein festes „positives" Gruppenelement durch innere Auto-

morphismen beliebig „hochtransformieren" kann. Wir beweisen also jetzt

$$\lambda(g f g^{-1}) = g(\lambda(f)) = g(\lambda).$$

Da $g(x)$ eine im strengen Sinne monotone Funktion ist, die genau die Zahlen des Intervalles $[0, 1]$ annimmt, so gibt es zu jedem x aus diesem Intervall genau ein μ_x, so daß $g(\mu_x) = x$ ist. Dieses μ_x ist für $x \leq g(\lambda)$ kleiner oder gleich λ und für $x > g(\lambda)$ größer als λ. Daraus folgt

$$g f g^{-1}(x) = g f g^{-1}(g(\mu_x)) = g f(\mu_x) \begin{cases} = x & \text{für } x \leq g(\lambda) \\ \neq x & \text{für } g(\lambda) < x < g(\lambda) + \varepsilon', \end{cases}$$

und das war die Behauptung.

Literatur.

[1] Artin-Whaples: Axiomatic characterization of fields by the product formula. Bull. Amer. Math. Soc. **51**, 469—492 (1945). — [2] Iwasawa, K.: On linearly ordered groups. J. Math. Soc. Jap. **1**, 1—9 (1949/50). — [3] Kaplansky, I.: Topological methods in valuation theory. Duke Math. J. **14**, 527—541 (1947). — [4] Krull, W.: Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern. II. Math. Z. **31**, 527—557 (1930). — [5] Krull, W.: Allgemeine Bewertungstheorie. J. reine angew. Math. **167**, 160—196 (1932). — [6] Neumann, B. H.: On ordered division rings. Trans. Amer. Math. Soc. **66**, 202—252 (1949). — [7] Preuss, G., u. F. K. Schmidt: Über den Hilbertschen Irreduzibilitätssatz. Math. Nachr. **4**, 348—365 (1950/51). — [8] Schilling, O. F. G.: Noncommutative valuations. Bull. Amer. Math. Soc. **51**, 297—304 (1945).

Münster, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 1. Mai 1952.)

Fischer, W.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 94—115 (1952)

Über die Zetafunktion des reell-quadratischen Zahlkörpers.

Von
Wilhelm Fischer.

Einleitung.

Im Jahre 1921 haben Hardy und Littlewood [2a] gezeigt, daß die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$, die für $\sigma > 1$ durch eine Dirichletsche Reihe und für $\sigma < 0$ vermöge der Funktionalgleichung ebenfalls durch eine konvergente Reihe repräsentiert wird, im kritischen Streifen $0 < \sigma < 1$ durch die Partialsummen dieser beiden Reihen approximativ darstellbar ist. Diese approximative Funktionalgleichung, für die sie ein Jahr später einen zweiten Beweis mit einer besseren Restgliedabschätzung veröffentlicht haben [2b], lautet:

Für $s = \sigma + i\,t$, $|t| = 2\pi\,x\,y$, $x > K$, $y > K$, $-H < \sigma < H$ gilt gleichmäßig in x und y

$$\zeta(s) = \sum_{n<x} n^{-s} + \chi(s) \sum_{n<y} n^{s-1} + O(x^{-\sigma}) + O(x^{\frac{1}{2}-\sigma}\, y^{-\frac{1}{2}}),$$

wobei

$$\chi(s) = 2\,(2\pi)^{s-1} \sin\frac{\pi}{2}\, s\, \Gamma(1-s)$$

der in der Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion auftretende Faktor ist.

Für den Spezialfall $x = y = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$ findet sich diese Formel bereits in Riemanns Nachlaß und wurde 1931 von Siegel [6b] veröffentlicht.

Die approximative Funktionalgleichung läßt sich nach verschiedenen Richtungen hin verallgemeinern; Hardy und Littlewood [2c] haben eine ähnliche Formel für $\zeta^2(s)$ gefunden, Suetuna [7] für die L-Reihen und Čudakov [1] für die Hurwitzsche Zetafunktion.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir statt der Riemannschen Zetafunktion die Dedekindsche Zetafunktion eines reell-quadratischen Zahlkörpers K und beweisen den folgenden

Satz 1. *Es sei*

$$s = \sigma + i\,t, \quad t^2 = \frac{4\pi^2}{d}\, X\, Y, \quad X \geq 1, \quad Y \geq 1, \quad c_1 \leq \frac{X}{Y} \leq c_2, \quad -M < \sigma < M,$$

dann gilt für eine beliebige Idealklasse[1]) $\mathfrak{R}$ *aus* K:

$$\zeta(s, \mathfrak{R}) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R} \\ N\mathfrak{a} < X}} N\mathfrak{a}^{-s} + \psi(s) \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}^{-1} \\ N\mathfrak{b} < Y}} N\mathfrak{b}^{s-1} + O(X^{\frac{1}{2}-\sigma}).$$

[1]) Vgl. Landau [2], § 8.

Dabei ist

$$\psi(s) = 4d^{\frac{1}{2}-s}(2\pi)^{2(s-1)}\sin^2\frac{\pi s}{2}\,\Gamma^2(1-s)$$

der in der Funktionalgleichung der Dedekindschen *Zetafunktion auftretende Faktor, $d>0$ die Diskriminante des Körpers. Die Konstante im Fehlerglied hängt nur von c_1, c_2, M und dem Körper ab.*

Die Hardy-Littlewoodsche Formel und ihre Verallgemeinerungen haben verschiedene Anwendungen gefunden. Hardy und Littlewood benutzen sie zur Abschätzung der Anzahl der Nullstellen auf der Geraden $\sigma=\frac{1}{2}$, sowie zur Abschätzung des Mittelwertes $\int_{-T}^{T}\zeta(\frac{1}{2}+it)|^4\,dt$. Die schönste Anwendung ist wohl die von Čudakov [1] in seiner Arbeit über die Goldbachsche Vermutung.

Die erste und dritte der hier genannten Anwendungen sind wegen der arithmetischen Schwierigkeiten nicht ohne weiteres auf den algebraischen Zahlkörper übertragbar; dagegen läßt sich eine Abschätzung des Mittelwertes auf der kritischen Geraden auch für die Dedekindsche Zetafunktion gewinnen. Allerdings ist zu beachten, daß im rationalen Fall die Summation der beiden Reihen nur bis $\left\lfloor\frac{t}{2\pi}\right\rfloor$ zu erstrecken ist (für $x=y$), im algebraischen dagegen bis $t\left[\frac{d}{2\pi}\right]$. Dies hat zur Folge, daß wir statt einer Abschätzung von $|\zeta^4(s)|$ nur eine solche von $|\zeta^2(s)|$ gewinnen können.

Der Beweis unseres Satzes 1 folgt im wesentlichen dem der zweiten Hardy-Littlewoodschen Arbeit [2b], der seinerseits die Methode des ersten Riemannschen Beweises für die Funktionalgleichung der Zetafunktion benutzt. Die durch die Übertragung auf einen algebraischen Zahlkörper hinzukommenden Schwierigkeiten lassen sich kurz folgendermaßen charakterisieren:

1. In den Reihen ist nicht über alle Zahlen, sondern nur über solche zu summieren, die als Norm eines Ideals aus $\mathfrak{R}$ darstellbar sind.

2. Die geometrische Reihe im algebraischen Zahlkörper[2]) ist nicht über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar.

3. Statt einfacher Integrale haben wir Doppelintegrale abzuschätzen.

Über die erste dieser Schwierigkeiten kommt man vermöge des Hilfssatzes 1 verhältnismäßig leicht hinweg; die zweite hat Siegel [6a] in seinem Beweis der Funktionalgleichung für die Dedekindsche Zetafunktion überwunden, indem er statt der geometrischen Reihe eine verallgemeinerte Lipschitzsche Formel benutzt. Wir haben für unsere Zwecke diese Formel nochmals zu verallgemeinern (Hilfssatz 2); diese verallgemeinerte Formel zwingt uns, statt der Zetafunktion selbst eine Kombination von zwei Zetafunktionen zu betrachten und zunächst für diese Kombination eine approximative Funktionalgleichung herzuleiten (Satz 2). Der Beweis dieses Satzes 2 umfaßt den Hauptteil der vorliegenden Arbeit (§§ 2—5); Satz 1 ergibt sich dann in § 6

[2]) Vgl. Hecke [3], S. 102.

verhältnismäßig leicht. In einem letzten Paragraphen geben wir dann als Folgerung aus Satz 1 eine Abschätzung von $\zeta_K(s)$ im kritischen Streifen, sowie eine Abschätzung des Mittelwertes von $|\zeta_K(s)|^2$ auf der kritischen Geraden.

Zur Bezeichnung sei bemerkt, daß C stets eine positive, nur von c_1, c_2, M und dem Körper abhängige Konstante bedeutet. Ferner verwenden wir in Abschätzungen die drei Bezeichnungen:

$$|f(z)| \leqq C\, g(|z|)$$

$$f(z) = O\big(g(|z|)\big)$$

$$f(z) \ll g(|z|)$$

als vollkommen gleichbedeutend nebeneinander. Das Zeichen $\alpha \succ 0$ (lies: α totalpositiv) bedeutet: es ist $\alpha > 0$ und $\alpha' > 0$. $\eta > 1$ ist die totalpositive Grundeinheit[3]) des Körpers. Zur Vereinfachung haben wir angenommen, daß die Grundeinheit des Körpers negative Norm hat (also gleich $\sqrt{\eta}$ ist); alle Überlegungen gelten mutatis mutandis auch im anderen Falle[4]).

Für die Anregung zur Beschäftigung mit diesem Gegenstande möchte ich Herrn RADEMACHER meinen herzlichen Dank aussprechen.

§1. Zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Es sei $f(u)$ eine im Intervall $0 < x_1 \leqq u \leqq x_2$ positive, monotone und differenzierbare Funktion, $\mathfrak{R}$ eine Idealklasse des Körpers K. Dann gilt:*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R} \\ x_1 \leqq N\mathfrak{a} \leqq x_2}} f(N\,\mathfrak{a}) = A \int_{x_1}^{x_2} f(u)\,du + O\Big(\int_{x_1}^{x_2} u^{-\frac{2}{3}} f(u)\,du + x_1^{\frac{1}{3}} f(x_1) + x_2^{\frac{1}{3}} f(x_2) \Big), \tag{1.1}$$

wobei A eine nur vom Körper abhängige positive Konstante bedeutet.

Beweis. Es bezeichne $g(m, \mathfrak{R})$ die Anzahl der Ideale aus $\mathfrak{R}$ mit der Norm m; dann ist bekanntlich[5]):

$$\sum_{m < x} g(m, \mathfrak{R}) = G(x, \mathfrak{R}) = A\, x + O(x^{\frac{1}{3}}). \tag{1.2}$$

Wir wenden nun auf die in (1.1) links stehende Summe partielle Summation an und bemerken, daß wir o. B. d. A. x_1 und x_2 als ganz annehmen dürfen, da der eventuell dadurch entstehende Fehler von geringerer Größen-

[3]) Das heißt gleich der Grundeinheit, wenn diese totalpositiv gewählt werden kann, andernfalls gleich deren Quadrat.

[4]) Auch die Beschränkung auf den quadratischen Zahlkörper ist nicht wesentlich, die im folgenden dargelegte Methode läßt sich ohne weiteres auch auf den totalpositiven Körper n-ten Grades übertragen. Man erhält dann eine entsprechende Formel mit dem Restglied $O\big(X^{1-\frac{1}{n}-\sigma}\big)$.

[5]) Siehe z.B. LANDAU [2], Satz 210.

ordnung als das Fehlerglied ist. Somit ergibt sich wegen (1.2)

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ x_1\leqq N\mathfrak{a}\leqq x_2}} f(N\mathfrak{a}) &= \sum_{m=x_1}^{x_2} g(m,\mathfrak{R})\, f(m)\\
&= \sum_{m=x_1}^{x_2-1} G(m,\mathfrak{R})\,[f(m)-f(m+1)]\\
&\qquad - G(x_1-1,\mathfrak{R})\, f(x_1) + G(x_2,\mathfrak{R})\, f(x_2)\\
&= -\sum_{m=x_1}^{x_2-1} G(m,\mathfrak{R}) \int_m^{m+1} f'(u)\,du - G(x_1-1,\mathfrak{R})\, f(x_1) + G(x_2,\mathfrak{R})\, f(x_2)\\
&= -\int_{x_1}^{x_2} G(u,\mathfrak{R})\, f'(u)\,du - A\,(x_1-1)\, f(x_1) + A\,x_2 f(x_2) +\\
&\qquad + O\left(x_1^{\frac{1}{3}} f(x_1) + x_2^{\frac{1}{3}} f(x_2)\right)\\
&= -A\int_{x_1}^{x_2} u\, f'(u)\,du - A\,x_1 f(x_1) + A\,x_2 f(x_2) +\\
&\qquad + O\left(\int_{x_1}^{x_2} u^{\frac{1}{3}} f'(u)\,du + x_1^{\frac{1}{3}} f(x_1) + x_2^{\frac{1}{3}} f(x_2)\right),
\end{aligned}$$

woraus durch partielle Integration (1.1) folgt.

Hilfssatz 2. *Es seien w_1 und w_2 zwei positive Variablen, $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{a}'$ das zu $\mathfrak{a}$ konjugierte Ideal*[6]*). Dann gilt für jedes $X\geqq 0$:*

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\mathfrak{a}\ \mu>0\\ N\mu>X}} (N\mu - X)\, e^{-2\pi(\mu w_1+\mu' w_2)}\\
&= \frac{1}{N\mathfrak{a}\sqrt{d}} \sum_{\mathfrak{a}'|\lambda} \iint\limits_{\substack{x_1>0\, x_2>0\\ x_1\cdot x_2>X}} (x_1 x_2 - X)\, e^{-2\pi(x_1 w_1 + x_2 w_2)}\, e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{a}\sqrt{d}}(\lambda x_1 - \lambda' x_2)}\, dx_1\, dx_2.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Zum Beweis betrachten wir die Funktion

$$\begin{cases}
f(x_1,x_2) = [(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)(\alpha_1' x_1+\alpha_2' x_2) - X]^z\, e^{-2\pi[(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2) w_1 + (\alpha_1' x_1+\alpha_2' x_2) w_2]} & \text{wenn:}\\
\qquad\qquad \begin{cases} \alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2>0\\ \alpha_1' x_1+\alpha_2' x_2>0\\ (\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)(\alpha_1' x_1+\alpha_2' x_2)>X \end{cases}\\
f(x_1,x_2)=0 \quad \text{sonst.}
\end{cases} \tag{1.4}$$

Dabei ist α_1, α_2 eine Basis des Ideals $\mathfrak{a}$ und z ein (zunächst reeller) Parameter.

Diese Funktion $f(x_1, x_2)$ ist für $z>2$ zweimal stetig differenzierbar und nebst ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung absolut ins Unendliche integrierbar. Folglich dürfen wir auf $f(x_1, x_2)$ die Poissonsche Summenformel[7]) anwenden:

$$\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty} f(m_1,m_2) = \sum_{l_1,l_2=-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(l_1 x_1 + l_2 x_2)} f(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2 \tag{1.5}$$

[6]) Das heißt das Ideal, das aus allen Konjugierten der Zahlen aus $\mathfrak{a}$ besteht. Für die spätere Anwendung sei angemerkt, daß $\mathfrak{a}'\in\mathfrak{R}^{-1}$.

[7]) Hecke [3], S. 110 oder Mordell [5], S. 412f.

und aus der allgemeinen Theorie folgt, daß die rechtsstehende Summe absolut konvergiert.

Auf das Integral (1.5) wenden wir die folgende Variabelntransformation an:

$$\xi_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \qquad x_1 = \frac{1}{\Delta}(\alpha_2' \xi_1 - \alpha_2 \xi_2)$$

$$\xi_2 = \alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 \qquad x_2 = \frac{1}{\Delta}(-\alpha_1' \xi_1 + \alpha_1 \xi_2)$$

mit der Funktionaldeterminante

$$\Delta = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1' & \alpha_2' \end{vmatrix} = \pm N\mathfrak{a}\sqrt{d}.$$

Da in (1.5) beide Reihen absolut konvergieren, dürfen wir diese beliebig umordnen. Setzen wir

$$\mu = m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 \qquad \lambda = l_1 \alpha_2' - l_2 \alpha_1',$$

so läuft die Summe auf der linken Seite über alle Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}$, auf Grund der Definition von $f(x_1, x_2)$ sind aber nur die Glieder mit $\mu > 0$ und $N\mu > X$ von Null verschieden; die Summe rechts ist über alle Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}'$ erstreckt. Beachtet man schließlich noch, daß:

$$e^{2\pi i(l_1 x_1 - l_2 x_2)} = e^{2\pi i(\lambda \xi_1 - \lambda' \xi_2)},$$

so erhalten wir aus (1.5):

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\substack{\mathfrak{a}(\mu)>0 \\ N\mu > X}} f(\mu) = {} & \frac{1}{N\mathfrak{a}\sqrt{d}} \sum_{\mathfrak{a}'(\lambda)} \int_{\substack{\xi_1>0 \\ \xi_1\xi_2>X}} \int_{\xi_2>0} (\xi_1 \xi_2 - X)^z \times \\ & \times e^{-2\pi(\xi_1 w_1 + \xi_2 w_2)} e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{a}\sqrt{d}}(\lambda \xi_1 - \lambda' \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \right.$$

Hier sind nun die Reihen auf beiden Seiten in jedem Streifen $G \geqq \Re(z) \geqq g > 0$ gleichmäßig in z konvergent und stellen folglich eine in diesem Bereich analytische Funktion dar. Nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung gilt die zunächst nur für $z > 2$ bewiesene Gl. (1.6) also für alle z mit $\Re(z) > 0$, insbesondere auch für $z = 1$, womit Hilfssatz 2 bewiesen ist.

§ 2. Vorbereitende Umformungen.

In Hilfssatz 2 waren wir aus Stetigkeitsgründen gezwungen, das Exponentialglied der Summe mit einem Faktor $(N\mu - X)$ zu versehen; das hat zur Folge, daß diese Transformationsformel nicht unmittelbar auf $\zeta(s, \mathfrak{K})$ angewandt werden kann, sondern nur auf eine Kombination von zwei Zetafunktionen, die eben diesen Faktor enthält. Als Vorstufe zu Satz 1 beweisen wir daher zunächst den folgenden

Satz 2. *Es sei*

$$F(X, Y, s) = \zeta(s, \mathfrak{R}) - \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R} \\ N\mathfrak{a} < X}} N\mathfrak{a}^{-s} - \psi(s) \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}^{-1} \\ N\mathfrak{b} < Y}} N\mathfrak{b}^{s-1}, \tag{2.1}$$

dann gilt unter den in Satz 1 aufgeführten Bedingungen:

$$F(X, Y, s-1) - XF(X, Y, s) = O(X^{1-\sigma}).$$

Zum Beweise setzen wir

$$\Phi(s) = \zeta(s-1, \mathfrak{R}) - X\zeta(s, \mathfrak{R}) - \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R} \\ N\mathfrak{a} < X}} N\mathfrak{a}^{1-s} + X \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R} \\ N\mathfrak{a} < X}} N\mathfrak{a}^{-s}. \tag{2.2}$$

$\Phi(s)$ ist eine in der ganzen s-Ebene analytische Funktion mit je einem einfachen Pol in $s = 1$ und $s = 2$. Es sei $\mathfrak{c}$ ein beliebiges, aber im folgenden festgehaltenes Ideal aus der zu $\mathfrak{R}$ inversen Klasse $\mathfrak{R}^{-1}$ und zunächst $s > 2$; dann ist:

$$\Phi(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R} \\ N\mathfrak{a} > X}} \frac{N\mathfrak{a} - X}{N\mathfrak{a}^s} = N\mathfrak{c}^{s-1} \sum_{\substack{\mathfrak{c}(\mu) > 0 \\ N\mu > XN\mathfrak{c}}} \frac{N\mu - XN\mathfrak{c}}{N\mu^s}$$

$$= \frac{N\mathfrak{c}^{s-1}(2\pi)^{2s}}{\Gamma^2(s)} \sum_{\substack{\mathfrak{c}(\mu) > 0 \\ N\mu > XN\mathfrak{c}}} \int_0^\infty \int_0^\infty z_1^{s-1} z_2^{s-1} (N\mu - XN\mathfrak{c})\, e^{-2\pi(\mu z_1 + \mu' z_2)}\, dz_1\, dz_2.$$

Dieser Ausdruck wird durch die Substitution

$$z_1 = \eta^w y \qquad z_2 = \eta^{-w} y \tag{2.3}$$

mit der Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(w, y)} = 2y \log \eta$$

übergeführt in

$$\Phi(s) = \frac{2 \log \eta\, N\mathfrak{c}^{s-1}(2\pi)^{2s}}{\Gamma^2(s)} \sum_{\substack{\mathfrak{c}(\mu) > 0 \\ N\mu > XN\mathfrak{c}}} \int_{-\infty}^{\infty} dw \int_0^\infty y^{2s-1} (N\mu - XN\mathfrak{c})\, e^{-2\pi y(\mu \eta^w + \mu' \eta^{-w})}\, dy$$

$$= \frac{2 \log \eta\, N\mathfrak{c}^{s-1}(2\pi)^{2s}}{\Gamma^2(s)} \sum_{\substack{\mathfrak{c}(\mu) > 0 \\ N\mu > XN\mathfrak{c}}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dw \int_0^\infty y^{2s-1} (N\mu - XN\mathfrak{c})\, e^{-2\pi y(\mu \eta^w + \mu' \eta^{-w})}\, dy.$$

Da hier alles positiv ist, dürfen wir Summation und Integration vertauschen; auf die dann unter dem Integral stehende Summe wenden wir Hilfssatz 2 an und erhalten:

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi(s) = {} & \frac{2 \log \eta\, N\mathfrak{c}^{s-2}(2\pi)^{2s}}{\sqrt{d}\, \Gamma^2(s)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dw \int_0^\infty y^{2s-1}\, dy \sum_{\mathfrak{c}' | \lambda} \int_{\substack{x_1 > 0 \\ x_1 x_2 > XN\mathfrak{c}}} \int_{x_2 > 0} (x_1 x_2 - XN\mathfrak{c}) \times \\ & \times e^{-2\pi y(x_1 \eta^w + x_2 \eta^{-w})}\, e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{c}}(\lambda x_1 - \lambda' x_2)}\, dx_1\, dx_2. \end{aligned} \right. \tag{2.4}$$

In dem Glied mit $\lambda = 0$

$$\Phi_0(s) = \frac{2 \log \eta \, N\mathfrak{c}^{s-2} (2\pi)^{2s}}{\sqrt{d}\, \Gamma^2(s)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dw \int_0^\infty y^{2s-1} dy \int_{x_1=0}^{\infty} \int_{x_2=\frac{XN\mathfrak{c}}{x_1}}^{\infty} (x_1 x_2 - XN\mathfrak{c}) \times$$
$$\times e^{-2\pi y (x_1 \eta^w + x_2 \eta^{-w})} \, dx_1 \, dx_2$$

können wir die Integration ausführen; wir substituieren

$$u = x_1 y, \quad v = x_1 x_2, \quad w = w, \quad z = x_2 y;$$

die Funktionaldeterminante dieser Substitution ist:

$$\frac{\partial(x_1, x_2, w, y)}{\partial(u, v, w, z)} = \frac{1}{2vy},$$

und wir erhalten:

$$\Phi_0(s) = \frac{\log \eta \, N\mathfrak{c}^{s-2} (2\pi)^{2s}}{\sqrt{d}\, \Gamma^2(s)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dw \int_{XN\mathfrak{c}}^{\infty} v^{-s} (v - XN\mathfrak{c}) \, dv \int_0^\infty u^{s-1} e^{-2\pi \eta^w u} \, du \int_0^\infty z^{s-1} e^{-2\pi \eta^{-w} z} \, dz$$
$$= \frac{\log \eta}{\sqrt{d}} N\mathfrak{c}^{s-2} \int_{XN\mathfrak{c}}^{\infty} v^{-s} (v - XN\mathfrak{c}) \, dv = \frac{\log \eta}{\sqrt{d}} N\mathfrak{c}^{s-2} \left\{ \frac{X^{2-s} N\mathfrak{c}^{2-s}}{s-2} - \frac{X^{2-s} N\mathfrak{c}^{2-s}}{s-1} \right\}$$

$$\Phi_0(s) = \frac{\log \eta}{\sqrt{d}} \frac{X^{2-s}}{(s-1)(s-2)}. \tag{2.5}$$

Ferner dürfen wir in (2.4) das Summenzeichen vor die Integrale ziehen, da sowohl die Summe als auch das Integral über y absolut konvergieren. Wenden wir außerdem die zu (2.3) inverse Substitution an, so ergibt sich[8]):

$$\left\{ \begin{aligned} &\Phi(s) - \Phi_0(s) \\ &= \frac{(2\pi)^{2s} N\mathfrak{c}^{s-2}}{\sqrt{d}\, \Gamma^2(s)} \sum_{\mathfrak{c}' | (\lambda)}{}' \int_0^\infty \int_0^\infty z_1^{s-1} z_2^{s-1} \, dz_1 \, dz_2 \int_{x_1=0}^{\infty} \int_{x_2=\frac{XN\mathfrak{c}}{x_1}}^{\infty} (x_1 x_2 - XN\mathfrak{c}) \times \\ &\quad \times e^{-2\pi (z_1 x_1 + z_2 x_2)} e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{c}} (\lambda x_1 - \lambda' x_2)} \, dx_1 \, dx_2. \end{aligned} \right. \tag{2.6}$$

Man überzeugt sich leicht, daß sich der Wert der Integrale in (2.6) nicht ändert, wenn wir die Integrationen über x_1 und x_2 längs Wegen $\mathfrak{C}_1(\lambda)$ und $\mathfrak{C}_2(\lambda)$ ausführen, die wie folgt definiert sind:

Wenn $\lambda \neq 0$ so sei $\mathfrak{C}_1(\lambda)$ die positiv imaginäre Achse, und $\mathfrak{C}_2(\lambda)$ der von $\frac{XN\mathfrak{c}}{x_1}$ längs der negativ imaginären Achse nach ∞ gehende Strahl.

Wenn $\lambda > 0$, $\lambda' < 0$ so läuft $\mathfrak{C}_1(\lambda)$ vom Nullpunkt durch den 4. Quadranten (z. B. auf einem Kreisbogen) zum Punkte $\sqrt{\left|\frac{\lambda'}{\lambda}\right|} XN\mathfrak{c}$ und von dort parallel der positiv imaginären Achse nach ∞.

Wenn $\lambda \neq 0$ bzw. $\lambda < 0$, $\lambda' > 0$ ist, so bedeuten $\mathfrak{C}_1(\lambda)$ und $\mathfrak{C}_2(\lambda)$ die Kurven, die man aus den eben beschriebenen durch Spiegelung an der reellen Achse erhält.

[8]) Der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß das Glied mit $\lambda = 0$ auszulassen ist.

Durch diese Verlegung der Integrationswege werden die Integrale über x gleichmäßig in z konvergent; wir dürfen daher die Reihenfolge der Integrationen vertauschen und erhalten:

$$\Phi(s)-\Phi_0(s)=\frac{(2\pi)^{2s}\,N\mathfrak{c}^{s-2}}{\sqrt{d}\,\Gamma^2(s)}\sum_{\mathfrak{c}'|(\lambda)}{}'\int_{\mathfrak{C}_1(\lambda)}\int_{\mathfrak{C}_2(\lambda)}(x_1x_2-XN\mathfrak{c})\times$$
$$\times\, e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{c}\sqrt{d}}(\lambda x_1-\lambda' x_2)}\,dx_1\,dx_2\int_0^\infty\int_0^\infty z_1^{s-1}z_2^{s-1}\,e^{-2\pi(z_1v_1+z_2x_2)}\,dz_1\,dz_2.$$

Nach Ausführung der Integrationen über z ergibt das:

$$(2.7)\qquad\left\{\begin{aligned}\Phi(s)-\Phi_0(s)=\frac{N\mathfrak{c}^{s-2}}{\sqrt{d}}\sum_{\mathfrak{c}'|(\lambda)}{}'\int_{\mathfrak{C}_1(\lambda)}\int_{\mathfrak{C}_2(\lambda)}(x_1x_2-XN\mathfrak{c})\times\\ \times\, x_1^{-s}x_2^{-s}\,e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{c}\sqrt{d}}(\lambda x_1-\lambda' x_2)}\,dx_1\,dx_2.\end{aligned}\right.$$

In dieser Gleichung, die zunächst nur für $s>2$ abgeleitet ist, ist die linke Seite eine in der ganzen (endlichen) s-Ebene analytische (sogar reguläre) Funktion; die Reihe auf der rechten Seite läßt sich für $|s|\leqq S$ gleichmäßig durch $\sum_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^{-1}} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{2}}$ majorisieren[9]) und stellt somit ebenfalls eine für alle s reguläre analytische Funktion dar. Auf Grund des Identitätssatzes für analytische Funktionen gilt also (2.7) in der ganzen s-Ebene.

Der weitere Gang des Beweises von Satz 2 ist nun folgender: Wir zeigen zunächst, daß sich aus der rechten Seite von (2.7) die in Satz 2 vorkommenden Glieder herleiten lassen, die in $\Phi(s)$ nicht explizit auftreten. Dazu sind offensichtlich die Glieder der Summe mit $|N\lambda|\geqq YN\mathfrak{c}$ nicht brauchbar und gesondert abzuschätzen. Wir setzen daher:

$$(2.8)\qquad\left\{\begin{aligned}R_1(s)=\frac{N\mathfrak{c}^{s-2}}{\sqrt{d}}\sum_{\substack{\mathfrak{c}'|(\lambda)\\ |N\lambda|\geqq YN\mathfrak{c}}}\int_{\mathfrak{C}_1(\lambda)}\int_{\mathfrak{C}_2(\lambda)}(x_1x_2-XN\mathfrak{c})\times\\ \times\, x_1^{-s}x_2^{-s}\,e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{c}\sqrt{d}}(\lambda x_1-\lambda' x_2)}\,dx_1\,dx_2\end{aligned}\right.$$

und haben:

$$(2.9)\qquad\left\{\begin{aligned}\Phi(s)=\frac{N\mathfrak{c}^{s-2}}{\sqrt{d}}\sum_{\substack{\mathfrak{c}'|(\lambda)\\ |N\lambda|<YN\mathfrak{c}}}\int_{\mathfrak{C}_1(\lambda)}\int_{\mathfrak{C}_2(\lambda)}(x_1x_2-XN\mathfrak{c})\times\\ \times\, x_1^{-s}x_2^{-s}\,e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{c}\sqrt{d}}(\lambda x_1-\lambda' x_2)}\,dx_1\,dx_2+R_1(s)+\Phi_0(s).\end{aligned}\right.$$

[9]) Für den Beweis sei auf § 4 verwiesen; die behauptete Majorante kann aus (4.4) direkt abgelesen werden.

§ 3. Herleitung des Hauptgliedes.

Wir fügen in den Integralen in (2.9) zu $\mathfrak{C}_2(\lambda)$ das Stück von 0 bis $\frac{X N \mathfrak{c}}{x_1}$ zu, d.h. wir setzen

$$(3.1)\quad \left\{ \Phi(s) = \frac{N \mathfrak{c}^{s-1}}{\sqrt{d}} \sum_{\substack{\mathfrak{c}'|(\lambda) \\ |N\lambda|<XN\mathfrak{c}}}{}' \int_0^{\pm i\infty} \int_0^{\pm i\infty} (x_1 x_2 - X N \mathfrak{c})\, x_1^{-s} x_2^{-s} e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{c}\sqrt{d}}(\lambda x_1 - \lambda' x_2)} \times \right.$$
$$\left. \times\, d x_1 d x_2 + R_1(s) - R_2(s) + \Phi_0(s), \right.$$

wobei

$$(3.2)\quad R_2(s) = \frac{N \mathfrak{c}^{s-2}}{\sqrt{d}} \sum_{\substack{\mathfrak{c}'|(\lambda) \\ |N\lambda|<YN\mathfrak{c}}} \int_{\mathfrak{C}_1(\lambda)} \int_0^{\frac{XN\mathfrak{c}}{x_1}} (x_1 x_2 - X N \mathfrak{c})\, x_1^{-s} x_2^{-s} e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{c}\sqrt{d}}(\lambda x_1 - \lambda' x_2)} d x_1 d x_2.$$

Die Integrale in (3.1) und (3.2) sind als verallgemeinerte Integrale aufzufassen[10], d.h. wenn $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist, so ist:

$$(3.3)\quad \int_0 z^{-s} f(z)\, dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_\varepsilon z^{-s} f(z)\, dz + \sum_{q=0}^{[\sigma]-1} a_q \frac{\varepsilon^{q+1-s}}{q+1-s} \right\},$$

wobei die für $\sigma < 1$ leere Summe natürlich Null zu setzen ist, und für ganzes s das letzte Glied durch $a_{s-1} \log \varepsilon$ zu ersetzen ist[11]). Insbesondere wird auf Grund dieser verallgemeinerten Integraldefinition das EULERsche Integral für alle $s = 0, -1, -2, \ldots$ sinnvoll und, wie man sich durch partielle Integration leicht überzeugt, gilt für alle s:

$$(3.4)\quad \int_0^{\infty} e^{-z} z^{s-1}\, dz = \Gamma(s).$$

Vermöge (3.4) lassen sich die Integrationen in (3.1) leicht ausführen; wir erhalten:

$$\Phi(s) - R_1(s) + R_2(s) - \Phi_0(s)$$
$$= \frac{N \mathfrak{c}^{s-2}}{\sqrt{d}} \sum_{\substack{\mathfrak{c}'|(\lambda)>0 \\ N\lambda<YN\mathfrak{c}}} N\lambda^{s-1} \left\{ N\lambda^{-1} \left[e^{-\pi i s} - 2 + e^{\pi i s} \right] \left(\frac{2\pi}{N\mathfrak{c}\sqrt{d}} \right)^{2(s-2)} \Gamma^2(2-s) \right.$$
$$\left. - X N \mathfrak{c} \left[e^{-\pi i (s-1)} + 2 + e^{\pi i (s-1)} \right] \left(\frac{2\pi}{N\mathfrak{c}\sqrt{d}} \right)^{2(s-1)} \Gamma^2(1-s) \right\}$$
$$= \frac{4(2\pi)^{2(s-2)}}{\sqrt{d}^{2s-3}} \sin^2 \frac{\pi}{2}(s-1)\, \Gamma^2(2-s)\, N \mathfrak{c}^{2-s} \sum_{\substack{\mathfrak{c}'|(\lambda)>0 \\ N\lambda<YN\mathfrak{c}}} N\lambda^{s-2} -$$
$$- \frac{4(2\pi)^{2(s-1)}}{\sqrt{d}^{2s-1}} \sin^2 \frac{\pi s}{2}\, \Gamma^2(1-s)\, X N \mathfrak{c}^{1-s} \sum_{\substack{\mathfrak{c}'(\lambda)>0 \\ N\lambda<YN\mathfrak{c}}} N\lambda^{s-1}$$

[10]) Vgl. [2b], S. 42.

[11]) Man überzeugt sich leicht (vgl. auch § 5), daß die Zusatzglieder für die Integrale in (3.1) und für die in (3.2) für jedes $\varepsilon > 0$ den gleichen Wert haben; der Wert der linken Seite von (3.1) wird durch die neue Integraldefinition also nicht geändert.

oder, da $\mathfrak{c}'$ ein Ideal aus $\mathfrak{K}$ ist:

$$(3.5)\quad \Phi(s) = \psi(s-1) \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{K}^{-1}\\ N\mathfrak{b}<Y}} N\mathfrak{b}^{s-2} - X\psi(s) \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{K}^{-1}\\ N\mathfrak{b}<Y}} N\mathfrak{b}^{s-1} + R_1(s) - R_2(s) + \Phi_0(s).$$

Vergleicht man dies mit den Definitionen (2.1) und (2.2), so sieht man, daß (3.5) gleichbedeutend ist mit:

$$(3.6)\quad F(X, Y, s-1) - XF(X, Y, s) = R_1(s) - R_2(s) + \Phi_0(s).$$

Da ferner nach (2.5)

$$(3.7)\quad \Phi_0(s) = O(t^{-2} X^{2-\sigma}) = O(X^{1-\sigma}),$$

so ist Satz 2 bewiesen, wenn wir zeigen können, daß $R_1(s)$ und $R_2(s)$ ebenfalls von dieser Größenordnung sind.

§ 4. Abschätzung des ersten Restgliedes.

Da die linke Seite von (3.6) für konjugierte Werte von s den gleichen Betrag hat, genügt es, die Abschätzung für eine Halbebene durchzuführen. In §§ 4 und 5 ist daher stets t positiv, d.h. also $t \geq \frac{2\pi}{\sqrt{d}}$ angenommen. Ferner begnügen wir uns damit den Teil der Summe abzuschätzen, der von den Gliedern mit $\lambda > 0$, $\lambda' < 0$ herrührt. Die Abschätzung der übrigen Glieder verläuft ganz analog, an einigen Stellen sogar wesentlich einfacher.

Wir betrachten daher statt $R_1(s)$ den Ausdruck:

$$T(s) = \frac{N\mathfrak{c}^{s-2}}{\sqrt{d}} \sum_{\substack{\mathfrak{c}'|(\lambda),\ \lambda>0,\ \lambda'<0\\ N\lambda \geqq Y N\mathfrak{c}}} \int_{\mathfrak{C}_1(\lambda)} \int_{\mathfrak{C}_2(\lambda)} (x_1 x_2 - XN\mathfrak{c})\, x_1^{-s} x_2^{-s}\, e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{c}\sqrt{d}}(\lambda x_1 - \lambda' x_2)}\, dx_1\, dx_2.$$

Durch die Substitution

$$(4.1)\quad x_1 = \sqrt{\left|\frac{\lambda'}{\lambda}\right|}\, N\mathfrak{c}\, dz_1 \qquad x_2 = \sqrt{\left|\frac{\lambda}{\lambda'}\right|}\, N\mathfrak{c}\, dz_2$$

ergibt sich daraus

$$(4.2)\quad \begin{cases} T(s) = d^{\frac{3}{2}-s} \sum\limits_{\substack{\mathfrak{c}'(\lambda)\\ |N\lambda|\geqq Y N\mathfrak{c}}} \int\limits_{\mathfrak{C}_1} \int\limits_{\mathfrak{C}_2} z_1^{-s} z_2^{-s} \left(z_1 z_2 - \frac{X}{d}\right) e^{2\pi i \sqrt{\frac{|N\lambda|}{N\mathfrak{c}}}(z_1+z_2)}\, dz_1\, dz_2 \\ \quad - d^{\frac{3}{2}-s} \sum\limits_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{K}^{-1}\\ N\mathfrak{b}\geqq Y}} \int\limits_{\mathfrak{C}_1} \int\limits_{\mathfrak{C}_2} z_1^{-s} z_2^{-s} \left(z_1 z_2 - \frac{X}{d}\right) e^{2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}}(z_1+z_2)}\, dz_1\, dz_2. \end{cases}$$

Gemäß unseren Festsetzungen in § 2 läuft dabei $\mathfrak{C}_1$ vom Nullpunkt längs eines Kreisbogens zum Punkte $\sqrt{X/d}$ und von dort parallel der positiv imaginären Achse nach ∞, während $\mathfrak{C}_2$ vom Punkte $\frac{X}{d z_1}$ ausgehend ebenfalls parallel der positiv imaginären Achse nach ∞ läuft. Wir substituieren nun

$$(4.3)\quad z_1 = v u, \qquad z_2 = \frac{v}{u}, \qquad \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(u, v)} = 2\frac{v}{u}.$$

Der dabei in der v-Ebene entstehende Weg $\mathfrak{C}'$ hat qualitativ denselben Verlauf wie $\mathfrak{C}_1$, der in der u-Ebene entstehende Weg kann so abgeändert werden, daß er vom Punkte $\sqrt{X/d}$ aus parallel zur Winkelhalbierenden des 1. Quadranten nach ∞ geht. Wir erhalten also:

$$T(s) = 2d^{\frac{3}{2}-s} \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}^{-1} \\ N\mathfrak{b} \geqq Y}} \int_{\mathfrak{C}'} \int_{\sqrt{\frac{X}{d}}}^{e^{\frac{\pi i}{4}}\infty} \left(v^2 - \frac{X}{d}\right) v^{1-2s} e^{2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}}\left(u+\frac{1}{u}\right)v} \frac{du}{u}\, dv.$$

Nun deformieren wir den Weg $\mathfrak{C}'$ so, daß bei Anwendung der Substitution

$$u + \frac{1}{u} = 2 + iy, \qquad \frac{du}{u} = \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 4iy}}$$

y reell wird. Setzen wir außerdem

$$v = \sqrt{\frac{X}{d}} + e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt{\frac{2}{d}}\, r = \sqrt{\frac{X}{d}} + \frac{r}{\sqrt{d}} + i\frac{r}{\sqrt{d}}, \qquad dv = \frac{1+i}{\sqrt{d}}\, dr,$$

so erhalten wir:

$$T(s) = \frac{8(1+i)}{\sqrt{d}} \sum_{N\mathfrak{b} \geqq Y} \int_0^\infty e^{-2\pi y \sqrt{\frac{XN\mathfrak{b}}{d}}} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 4iy}} \int_0^\infty (\sqrt{X}r + i\sqrt{X}r + ir^2) \times$$
$$\times (\sqrt{X} + r + ir)^{1-2s} e^{-2\pi \sqrt{\frac{N\mathfrak{b}}{d}} r(2+y)} e^{2\pi i \sqrt{\frac{N\mathfrak{b}}{d}}(2r+2\sqrt{X}-yr)} dr.$$

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{aligned} |T(s)| \leqq C X^{1-\sigma} \sum_{N\mathfrak{b} \geqq Y} \int_0^\infty e^{-2\pi y \sqrt{\frac{XN\mathfrak{b}}{d}}} \frac{dy}{\sqrt{y}} \int_0^\infty r \left(1 + \frac{r}{\sqrt{X}}\right)^{2-2M} \times \\ \times e^{2t \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{\sqrt{X}+r}} e^{-4\pi \sqrt{\frac{N\mathfrak{b}}{d}} r} dr. \end{aligned} \right.$$

Das erste Integral läßt sich explizit ausrechnen:

$$(4.5) \qquad \int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} e^{-2\pi \sqrt{\frac{xN\mathfrak{b}}{d}} y} dy = \frac{d^{\frac{1}{4}} \Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi} X^{\frac{1}{4}} N\mathfrak{b}^{\frac{1}{4}}} = C X^{-\frac{1}{4}} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{4}};$$

für das zweite beachten wir, daß für $r \geqq 0$:

$$(4.6) \qquad \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{\sqrt{X}+r} \leqq \frac{r}{\sqrt{X}+r} = \frac{r}{\sqrt{X}} - \frac{r^2}{(\sqrt{X}+r)\sqrt{X}} \leqq \frac{r}{\sqrt{X}}$$

und daher für $N\mathfrak{b} \geqq 4Y$:

$$\int_0^\infty \left(1 + \frac{r}{\sqrt{X}}\right)^{2(M+1)} e^{2t \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{\sqrt{X}+r}} e^{-4\pi \sqrt{\frac{N\mathfrak{b}}{d}} r} r\, dr$$
$$\leqq \int_0^\infty r \left(1 + \frac{r}{\sqrt{X}}\right)^{2(M+1)} e^{\frac{4\pi}{\sqrt{d}}(\sqrt{Y} - \sqrt{N\mathfrak{b}})r} dr$$
$$= (\sqrt{N\mathfrak{b}} - \sqrt{Y})^{-2} \int_0^\infty r \left(1 + \frac{r}{\sqrt{X}(\sqrt{N\mathfrak{b}} - \sqrt{Y})}\right)^{2(M-1)} e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{d}} r} \leqq C(\sqrt{N\mathfrak{b}} - \sqrt{Y})^{-2}.$$

Bezeichnen wir den Beitrag der Glieder mit $N\mathfrak{b} \geqq 4Y$ mit $T_1(s)$, so haben wir

$$|T_1(s)| \leq C X^{\frac{3}{4}-\sigma} \sum_{N\mathfrak{b} \geqq 4Y} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{4}} \left(\sqrt{N\mathfrak{b}} - \sqrt{Y}\right)^{-2}$$

und nach Hilfssatz 1:

$$\sum_{N\mathfrak{b} \geqq 4Y} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{4}} \left(\sqrt{N\mathfrak{b}} - \sqrt{Y}\right)^{-2} \ll \int_{4Y}^{\infty} u^{-\frac{1}{4}} \left(\sqrt{u} - \sqrt{Y}\right)^{-2} du$$

$$= Y^{-\frac{1}{4}} \int_{4}^{\infty} v^{-\frac{1}{4}} \left(\sqrt{v} - 1\right)^{-2} dv = O\left(Y^{-\frac{1}{4}}\right)$$

folglich:

$$T_1(s) = O\left(X^{\frac{3}{4}-\sigma} Y^{-\frac{1}{4}}\right) = O\left(X^{1-\sigma}\right). \tag{4.7}$$

Den Beitrag der Glieder mit $Y \leqq N\mathfrak{b} < 4Y$ bezeichnen wir mit $T_2(s)$ und haben wegen (4.5):

$$|T_2(s)| \leq C X^{\frac{3}{4}-\sigma} \int_0^{\infty} r \left(1 + \frac{r}{\sqrt{x}}\right)^{2(M+1)} e^{2t \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{\sqrt{x}+r}} \sum_{Y \leqq N\mathfrak{b} < 4Y} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{4}} e^{-4\pi \sqrt{\frac{N\mathfrak{b}}{d}} r} dr.$$

Die Summe hier wird wieder nach Hilfssatz 1 ausgewertet:

$$\sum_{Y \leqq N\mathfrak{b} < 4Y} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{4}} e^{-4\pi \sqrt{\frac{N\mathfrak{b}}{d}} r} \ll \int_{Y}^{4Y} u^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{4\pi r}{\sqrt{d}} \sqrt{u}} du + Y^{\frac{1}{12}} e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{d}} \sqrt{Y} r}$$

$$= 2 \cdot \int_{\sqrt{Y}}^{2\sqrt{Y}} v^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{4\pi r}{\sqrt{d}} v} dv + Y^{\frac{1}{12}} e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{d}} \sqrt{Y} r}$$

$$\ll Y^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{d}} \sqrt{Y} r} \left(\frac{1}{r} + 1\right).$$

Für den arc tg verwenden wir jetzt die schärfere Abschätzung in (4.6). Dann bleibt:

$$T_2(s) \ll X^{\frac{3}{4}-\sigma} Y^{\frac{1}{4}} \int_0^{\infty} (1+r) \left(1 + \frac{r}{\sqrt{X}}\right)^{2(M+1)} e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{d}} \frac{\sqrt{Y} r^2}{\sqrt{X}+r}} dr$$

$$\ll X^{1-\sigma} \int_0^{\infty} (1+r)^{2M+3} e^{-C \frac{r^2}{1+r}} dr$$

$$T_2(s) = O\left(X^{1-\sigma}\right). \tag{4.8}$$

Aus (4.7) und (4.8) folgt:

$$T(s) = O\left(X^{1-\sigma}\right)$$

und auf Grund unserer Bemerkung zu Anfang dieses Paragraphen:

$$R_1(s) = O\left(X^{1-\sigma}\right). \tag{4.9}$$

§ 5. Abschätzung des zweiten Restgliedes.

Wir betrachten auch hier nur die Glieder mit $\lambda > 0$, $\lambda' < 0$, wenden auf die Integrale in (3.2) die Substitution (4.1) an und zerlegen das innere Integral in zwei Teile, indem wir zunächst von 0 nach $-i\frac{X}{2dz_1}$ und dann von $-i\frac{X}{2dz_1}$ nach $\frac{X}{dz_1}$ integrieren.

Setzen wir zur Abkürzung

$$(5.1)\qquad U(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^{-1}\\ N\mathfrak{b}<Y}} \int_{\mathfrak{C}_1} \int_0^{-i\frac{X}{2dz_1}} z_1^{-s} z_2^{-s} e^{2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}}(z_1+z_2)}\, dz_1\, dz_2 = \sum_{N\mathfrak{b}<Y} I_{\mathfrak{b}}(s)$$

und

$$(5.2)\qquad V(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^{-1}\\ N\mathfrak{b}<Y}} \int_{\mathfrak{C}_1} \int_{-i\frac{X}{2dz_1}}^{\frac{X}{dz_1}} z_1^{-s} z_2^{-s} \left(z_1 z_2 - \frac{X}{d}\right) e^{2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}}(z_1+z_2)}\, dz_1\, dz_2,$$

so ist

$$(5.3)\qquad R_2(s) = d^{\frac{1}{2}-s} U(s-1) - X d^{-\frac{1}{2}-s} U(s) + d^{\frac{1}{2}-s} V(s) + \cdots,$$

wobei die Punkte andeuten, daß noch analoge Ausdrücke folgen, die von den hier nicht berücksichtigten λ herrühren; die Abschätzung dieser Glieder verläuft analog zu der im folgenden durchgeführten Abschätzung von $U(s)$ und $V(s)$ und ergibt dieselbe Größenordnung.

Zur Abschätzung der Integrale $I_{\mathfrak{b}}(s)$ zerlegt man diese in drei Teile und erhält nach entsprechender Deformation der Integrationswege

$$(5.4)\qquad I_{\mathfrak{b}}(s) = \int_{\mathfrak{C}_1} \int_0^{-i\frac{X}{2dz_1}} = \int_{z_1=0} \int_{z_2=0}^{-i\sqrt{\frac{X}{2d}}\sqrt{\frac{X}{2d}}} + \int_{\mathfrak{L}_1}\int_{\mathfrak{L}_2} + \int_{z_1=0} \int_{z_2=\sqrt{\frac{X}{2d}}}^{-i\sqrt{\frac{X}{2d}} - i\frac{X}{2dz_1}} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Dabei läuft in I_2 der Weg $\mathfrak{L}_1$ längs einer Geraden von $-i\sqrt{\frac{X}{2d}}$ nach $\sqrt{\frac{X}{2d}}$ und von dort parallel der positiv imaginären Achse nach ∞; $\mathfrak{L}_2$ läuft vom Nullpunkt längs eines kleinen Halbkreises durch den ersten Quadranten, schneidet die reelle Achse und geht dann geradlinig zum Punkte $-i\frac{X}{2dz_1}$. Die übrigen Integrationen in (5.4) sind geradlinig zwischen den angegebenen Grenzen auszuführen. Für $\sigma \geqq 1$ sind die Integrale als verallgemeinerte Integrale aufzufassen. Nach (3.3) ist also

$$I_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-i\varepsilon}^{-i\sqrt{\frac{X}{2d}}} z_1^{-s} e^{2\pi i\sqrt{N\mathfrak{b}}z_1} dz_1 - \sum_{k=0}^{[\sigma]-1} \frac{(2\pi i\sqrt{N\mathfrak{b}})^k}{k!}\,\frac{(-i\varepsilon)^{k+1-s}}{s-1-k}\right\} \times$$

$$\times \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\varepsilon}^{\sqrt{\frac{X}{2d}}} z_2^{-s} e^{2\pi i\sqrt{N\mathfrak{b}}z_2} dz_2 - \sum_{k=0}^{[\sigma]-1} \frac{(2\pi i\sqrt{N\mathfrak{b}})^k}{k!}\,\frac{\varepsilon^{k+1-s}}{s-1-k}\right\} = I_{11}\cdot I_{12}.$$

Die Abschätzung dieser beiden Integrale bereitet keine Schwierigkeiten; es ist

$$I_{11} = e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)} \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\sqrt{\frac{X}{2d}}} z_1^{-s} e^{2\pi \sqrt{N\mathfrak{b}} z_1} dz_1 - \sum_{k=0}^{[\sigma]-1} \frac{(2\pi \sqrt{N\mathfrak{b}})^k}{k!} \frac{\varepsilon^{k+1-s}}{s-1-k} \right\}$$

$$= e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\pi \sqrt{N\mathfrak{b}})^m}{m!} \frac{\sqrt{\frac{X}{2d}}^{1-s+m}}{1-s+m} - \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{m=[\sigma]}^{\infty} \frac{(2\pi \sqrt{N\mathfrak{b}})^m}{m!} \frac{\varepsilon^{1-s+m}}{1-s+m} \right\}.$$

Da die zweite Summe nach dem Grenzübergang verschwindet, bleibt

$$|I_{11}| \leq e^{-\frac{\pi}{2}t} \sqrt{\frac{X}{2d}}^{1-\sigma} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{|1-s+m|} \frac{\left(2\pi \sqrt{\frac{XY}{2d}}\right)^m}{m!} \leq C X^{\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2}} e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)t}.$$

Ebenso ergibt sich

$$|I_{12}| \leq \sqrt{\frac{X}{2d}}^{1-\sigma} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{|1-s+m|} \frac{\left(2\pi \sqrt{\frac{XY}{2d}}\right)^m}{m!} \leq C X^{\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2}} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}$$

und daher

$$I_1 = I_{11} \cdot I_{12} = O\left(X^{1-\sigma} e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)t}\right) = O(e^{-Ct}). \tag{5.41}$$

In dem zweiten Summanden von (5.4) ist nur das innere Integral verallgemeinert:

$$\left\{ \begin{aligned} I_2 = & \int_{z_1=-i\sqrt{\frac{X}{2d}}}^{i\infty} z_1^{-s} e^{2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}} z_1} dz_1 \times \\ & \times \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{-i\frac{X}{2dz_1}} z_2^{-s} e^{2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}} z_2} dz_2 - \sum_{k=0}^{[\sigma]-1} \frac{(2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}})^k}{k} \frac{\varepsilon^{k+1-s}}{s-k-1} \right\} \\ & = e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)} \int_{e^{-\pi i}\sqrt{\frac{X}{2d}}}^{\infty} z_1^{-s} e^{-2\pi \sqrt{N\mathfrak{b}} z_1} J_2(z_1)\, dz_1 \end{aligned} \right. \tag{5.42}$$

mit

$$J_2(z_1) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{e^{\pi i}\varepsilon}^{\frac{X}{2dz_1}} z_2^{-s} e^{-2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}} z_2} dz_2 - \sum_{k=0}^{[\sigma]-1} \frac{(-2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}})^k}{k!} \frac{(e^{\pi i}\varepsilon)^{k+1-s}}{s-k-1} \right\}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}})^m}{m!\,(m-s+1)} \left(\frac{X}{2dz_1}\right)^{m-s+1}.$$

In (5.42) eingesetzt ergibt sich das

$$I_2 = e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)} \sqrt{\frac{X}{2d}}^{1-s} \sqrt{\frac{X}{2d}}^{1-s} \int_{e^{-\pi i}}^{\infty} e^{-2\pi \sqrt{\frac{N\mathfrak{b}X}{2d}} z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}})^m}{m!\,(m-s+1)} \sqrt{\frac{X}{2d}}^m \frac{dz}{z^{m+1}}.$$

Nun deformieren wir nochmals den Integrationsweg; wir integrieren zunächst längs eines Halbkreises von $e^{-\pi i}$ nach 1 und dann von 1 längs der positiv reellen Achse nach ∞:

$$|I_2| \leqq C e^{-\frac{\pi}{2}t} X^{1-\sigma} \left\{ \int_1^\infty e^{-2\pi \sqrt{\frac{Nb\,X}{2d}} \left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{z} + \int_0^\pi e^{-2\pi \sqrt{\frac{XNb}{2d}} (\cos\varphi - 1)} d\varphi \right\}$$

$$\leqq C e^{-\frac{\pi}{2}t} X^{1-\sigma} \left\{ \int_0^\infty e^{-Cr} \frac{dr}{\sqrt{r^2+4}} + \int_0^\pi e^{\frac{t}{\sqrt{2}}(1-\cos\varphi)} d\varphi \right\}.$$

$$I_2 = O\left(X^{1-\sigma} e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)t}\right) = O\left(e^{-Ct}\right). \tag{5.43}$$

Im dritten Summanden von (5.4) vertauschen wir die Reihenfolge der Integrationen:

$$\left\{ \begin{aligned} I_3 &= e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)} \int_{z_1=0}^{\sqrt{\frac{X}{2d}}} z_1^{-s} e^{2\pi \sqrt{Nb}\, z_1} \int_{z_2=\sqrt{\frac{X}{2d}}}^{\frac{X}{2dz_1}} z_2^{-s} e^{2\pi i \sqrt{Nb}\, z_2} dz_1\, dz_2 \\ &= e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)} \int_{z_2=\sqrt{\frac{X}{2d}}}^{\infty} z_2^{-s} e^{2\pi i \sqrt{Nb}\, z_2} \int_{z_1=0}^{\frac{X}{2dz_2}} z_1^{-s} e^{2\pi \sqrt{Nb}\, z_1} dz_1\, dz_2 \\ &= e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)} \int_{z_2=\sqrt{\frac{X}{2d}}}^{\infty} z_2^{-s} e^{2\pi i \sqrt{Nb}\, z_2} J_3(z_2)\, dz_2 \end{aligned} \right. \tag{5.44}$$

mit

$$J_3(z_2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_\varepsilon^{\frac{X}{2dz_2}} z_1^{-s} e^{2\pi \sqrt{Nb}\, z_1} dz_1 - \sum_{k=0}^{[\sigma]-1} \frac{(2\pi \sqrt{Nb})^k}{k!} \frac{\varepsilon^{k+1-s}}{s-k-1} \right\}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\pi \sqrt{Nb})^m}{m!\,(m-s+1)} \left(\frac{X}{2dz_2}\right)^{m-s+1}.$$

Also folgt aus (5.44)

$$J_3 = e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)} \left(\frac{X}{2d}\right)^{1-s} \int_{z=1}^{\infty} e^{2\pi i \sqrt{\frac{XNb}{2d}}\, z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(2\pi \sqrt{\frac{XNb}{2d}}\right)^m}{m!\,(m-s+1)} \frac{dz}{z^{m+1}}.$$

Hier dürfen wir die obere Grenze des Integrals von $+\infty$ nach $i\infty$ verschieben; substituieren wir dann $z = iy$, so ergibt sich, wenn als Integrationsweg wieder zunächst ein Viertelkreis und dann die positiv reelle Achse

gewählt wird:

$$J_3 = e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)}\left(\frac{X}{2d}\right)^{1-s}\int_{-i}^{\infty} e^{-2\pi\sqrt{\frac{XNb}{2d}}y}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-2\pi i\sqrt{\frac{XNb}{2d}}\right)^m}{m!\,(m-s+1)}\frac{dy}{y^{m+1}}$$

$$\ll e^{-\frac{\pi}{2}t}X^{1-\sigma}\left\{\int_1^{\infty} e^{-2\pi\sqrt{\frac{XNb}{2d}}\left(y-\frac{1}{y}\right)}dy+\int_0^{\pi/2} e^{\frac{t}{\sqrt{2}}(1-\cos\varphi)}\right\}d\varphi.$$

$$J_3 = O\left(X^{1-\sigma}e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)t}\right) = O(e^{-Ct}). \tag{5.45}$$

Aus (5.41), (5.43), (5.45) folgt nach (5.4), (5.1) und Hilfssatz 1:

$$U(s) = O(e^{-Ct}). \tag{5.5}$$

Die beiden ersten Glieder in (5.3) liefern also keinen wesentlichen Beitrag zum Restglied.

Es bleibt noch die Abschätzung von $V(s)$, diese verläuft ähnlich wie die von $T(s)$ in § 4. Wir wenden die Substitution (4.3) an und erhalten:

$$V(s) = 4\sum_{Nb<Y}\int_{e^{-\frac{\pi i}{4}}}^{i\infty}\int_{\sqrt{\frac{X}{2d}}}^{\sqrt{\frac{X}{d}}}\left(v^2-\frac{X}{d}\right)v^{1-2s}e^{2\pi i\sqrt{Nb}v\left(u+\frac{1}{u}\right)}\frac{du}{u}dv. \tag{5.6}$$

Nun setzen wir:

$$u+\frac{1}{u} = 2+iy, \qquad \frac{du}{u} = \frac{dy}{\sqrt{y^2-4iy}}$$

und

$$v = \sqrt{\frac{X}{d}}-\frac{r}{\sqrt{d}}-i\frac{r}{\sqrt{d}} = \frac{1}{\sqrt{d}}\left(\sqrt{X}-(1+i)r\right), \qquad dv = -\frac{1+i}{\sqrt{d}}dr;$$

das ergibt:

$$V(s) = 4d^{s-2}(1+i)\sum_{Nb<Y}\int_0^{\infty} e^{-2\pi\sqrt{\frac{XNb}{d}}y}\frac{dy}{\sqrt{y^2-4iy}}\times$$

$$\times\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{X}}\left(r^2(1+i)^2-2\sqrt{X}(1+i)r\right)\left(\sqrt{X}-(1+i)r\right)^{1-2s}\times$$

$$\times e^{2\pi\sqrt{\frac{Nb}{d}}(2r-yr+2i\sqrt{X}-2ir-iry)}dr \ll X^{1-\sigma}\sum_{Nb<Y}\int_0^{\infty} e^{-\pi\sqrt{\frac{XNb}{d}}y}\frac{dy}{\sqrt{y}}\times$$

$$\times\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{X}} r\left(1+\frac{r}{\sqrt{X}}\right)^{2(M+1)}e^{-2t\operatorname{arctg}\frac{r}{\sqrt{X}-r}}e^{4\pi\sqrt{\frac{Nb}{d}}r}dr.$$

Nach (4.5) folgt daraus

$$V(s) \ll X^{\frac{3}{4}-\sigma}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{X}} r\,e^{-2t\operatorname{arctg}\frac{r}{\sqrt{X}-r}}\sum_{Nb<Y}Nb^{-\frac{1}{4}}e^{4\pi\sqrt{\frac{Nb}{d}}r}dr. \tag{5.61}$$

Um auf die Summe Hilfssatz 1 anwenden zu können, müssen wir diese in zwei Teile zerlegen. Die Glieder der Summe sind monoton abnehmend, solange $N\mathfrak{b} \leqq \left(\frac{\sqrt{d}}{8\pi r}\right)^2$; daher setzen wir:

$$V_1(s) = X^{\frac{3}{4}-\sigma} \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{X}} r\, e^{-2t \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{\sqrt{X}-r}} \sum_{N\mathfrak{b} \leqq \left(\frac{\sqrt{d}}{8\pi r}\right)^2} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{4\pi r}{\sqrt{d}}\sqrt{N\mathfrak{b}}}\, dr.$$

Die Summe hier ist aber leer, sobald $r > \frac{\sqrt{d}}{8\pi}$, daher haben wir

$$V_1(s) \leqq X^{\frac{3}{4}-\sigma} \int_0^{\frac{\sqrt{d}}{8\pi}} r \sum_{N\mathfrak{b} < \left(\frac{\sqrt{d}}{8\pi r}\right)^2} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{4\pi r}{\sqrt{d}}\sqrt{N\mathfrak{b}}}\, dr$$

$$V_1(s) = O\left(X^{\frac{3}{4}-\sigma}\right). \tag{5.62}$$

Für $N\mathfrak{b} \geqq \left(\frac{\sqrt{d}}{8\pi r}\right)^2$ sind die Glieder der Summe[12]) in (5.61) monoton zunehmend, und wir erhalten nach Hilfssatz 1:

$$\sum_{\left(\frac{\sqrt{d}}{8\pi r}\right)^2 \leqq N\mathfrak{b} < Y} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{4\pi r}{\sqrt{d}}\sqrt{N\mathfrak{b}}} \ll \int_1^Y u^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{4\pi r}{\sqrt{d}}\sqrt{u}}\, du + Y^{\frac{1}{12}} e^{\frac{4\pi r}{\sqrt{d}}\sqrt{Y}}$$

$$= 2\int_1^Y v^{\frac{1}{2}} e^{\frac{4\pi r}{\sqrt{d}} v}\, dv + Y^{\frac{1}{12}} e^{\frac{4\pi r}{\sqrt{d}}\sqrt{Y}} \ll Y^{\frac{1}{4}} e^{\frac{4\pi r}{\sqrt{d}}\sqrt{Y}} \left(\frac{1}{r}+1\right).$$

Setzt man das in (5.61) ein und beachtet, daß für $0 \leqq r \leqq \frac{1}{2}\sqrt{X}$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{r}{\sqrt{X}-r} \geqq \frac{r}{\sqrt{X}-r} - \frac{1}{3}\left(\frac{r}{\sqrt{X}-r}\right)^3 \geqq \frac{r}{\sqrt{X}} + \frac{1}{6}\frac{r^2}{X},$$

so erhält man

$$V_2(s) = X^{\frac{3}{4}-\sigma} \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{X}} r\, e^{-2t \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{\sqrt{X}-r}} \sum_{\left(\frac{\sqrt{d}}{8\pi r}\right)^2 \leqq N\mathfrak{b} < Y} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{4\pi r}{\sqrt{d}}\sqrt{N\mathfrak{b}}}\, dr$$

$$\ll X^{\frac{3}{4}-\sigma} Y^{\frac{1}{4}} \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{X}} (1+r)\, e^{-\frac{2\pi}{3\sqrt{d}}\sqrt{\frac{Y}{X}}\, r^2}\, dr.$$

$$V_2(s) = O\left(X^{1-\sigma}\right). \tag{5.63}$$

Aus (5.62), (5.63), (5.5) und (5.3) folgt

$$R_2(s) = O\left(X^{1-\sigma}\right) \tag{5.7}$$

und Satz 2 ist bewiesen.

[12]) Falls die Summe leer ist, gilt die Abschätzung natürlich a fortiori.

§ 6. Beweis von Satz 1.

Satz 1 folgt aus Satz 2 durch Differenzbildung; wir ersetzen X und Y durch $X+\sqrt{X}$ bzw. $Y-\frac{Y}{1+\sqrt{X}}$. Nach Satz 2 gilt dann:

$$F(X,Y,s-1)-(X+\sqrt{X})F(X,Y,s)+\sqrt{X}F(X,Y,s)\ll X^{1-\sigma} \tag{6.1}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} &F\Big(X+\sqrt{X},Y-\frac{Y}{1+\sqrt{X}},s-1\Big)- \\ &\qquad -(X+\sqrt{X})F\Big(X+\sqrt{X},Y-\frac{Y}{1+\sqrt{X}},s\Big)\ll X^{1-\sigma}. \end{aligned}\right. \tag{6.2}$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\left\{\begin{aligned} W(s)&=F(X,Y,s)-F\Big(X+\sqrt{X},Y-\frac{Y}{1+\sqrt{X}},s\Big) \\ &=\sum_{\substack{X<N\mathfrak{a}<X+\sqrt{X}\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{R}}} N\mathfrak{a}^{-s}-\psi(s)\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^{-1}\\ Y-\frac{Y}{1+\sqrt{X}}\leqq N\mathfrak{b}<Y}} N\mathfrak{b}^{s-1} \end{aligned}\right. \tag{6.3}$$

und subtrahieren (6.2) von (6.1). Das ergibt:

$$W(s-1)-(X+\sqrt{X})W(s)+\sqrt{X}F(X,Y,s)\ll X^{1-\sigma}$$

oder

$$F(X,Y,s)\ll X^{\frac{1}{2}-\sigma}+\Big|(1+\sqrt{X})W(s)-\frac{1}{\sqrt{X}}W(s-1)\Big|. \tag{6.4}$$

Zur Abschätzung der Differenz rechts beachten wir, daß nach der bekannten Abschätzung für $\Gamma(z)$ sowie der Funktionalgleichung der Gammafunktion und des Sinus

$$\psi(s-1)=-d\frac{(s-1)^2}{4\pi^2}\psi(s)+O(e^{-Ct})=(XY+O(t))\psi(s).$$

Daher folgt nach (6.3):

$$\left\{\begin{aligned} &(1-\sqrt{X})W(s)-\frac{1}{\sqrt{X}}W(s-1) \\ &=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\leqq N\mathfrak{a}<X+\sqrt{X}}} N\mathfrak{a}^{-s}\Big(1+\sqrt{X}-\frac{N\mathfrak{a}}{\sqrt{X}}\Big)-\psi(s)\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^{-1}\\ \frac{Y\sqrt{X}}{1+\sqrt{X}}\leqq N\mathfrak{b}<Y}}\times \\ &\quad\times N\mathfrak{b}^{s-2}\big(N\mathfrak{b}(1+\sqrt{X})-Y\sqrt{X}\big)+O\Big(|\psi(s)|\sqrt{Y}\sum_{\substack{\frac{Y\sqrt{X}}{1-\sqrt{X}}\leqq N\mathfrak{b}<Y}} N\mathfrak{b}^{\sigma-2}\Big). \end{aligned}\right. \tag{6.5}$$

Hier sind die Beträge der Summanden, je nach dem Werte von σ, monoton, oder bestehen aus zwei monotonen Teilen; in beiden Fällen ergibt sich nach Hilfssatz 1:

$$(6.6)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{X\leqq N\mathfrak{a}<X+\sqrt{X}} N\mathfrak{a}^{-\sigma}\Big(1+\sqrt{X}-\frac{N\mathfrak{a}}{\sqrt{X}}\Big)\ll\int_X^{X+\sqrt{X}} u^{-\sigma}\Big(1+\sqrt{X}-\frac{u}{\sqrt{X}}\Big)du\\ &=\int_0^{\sqrt{X}}(v+X)^{-\sigma}\Big(1-\frac{v}{\sqrt{X}}\Big)dv=O(X^{\frac{1}{2}-\sigma})\end{aligned}\right.$$

und

$$(6.7)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\frac{Y\sqrt{X}}{1+\sqrt{X}}\leqq N\mathfrak{b}<Y} N\mathfrak{b}^{\sigma-2}\big(N\mathfrak{b}\,(1+\sqrt{X})-Y\sqrt{X}\big)\\ &\ll\int_{\frac{Y\sqrt{X}}{1+\sqrt{X}}}^{Y} u^{\sigma-2}\big(u\,(1+\sqrt{X})-\sqrt{X}\,Y\big)du\\ &=\frac{\sqrt{X}}{1+\sqrt{X}}\int_0^{\frac{Y}{\sqrt{X}}}\Big(Y-v\frac{\sqrt{X}}{1+\sqrt{X}}\Big)^{\sigma-2}(Y-v\sqrt{X})\,dv=O(Y^{\sigma}X^{-\frac{1}{2}}).\end{aligned}\right.$$

Schließlich haben wir für das letzte Glied in (6.5):

$$(6.8)\quad \sqrt{Y}\sum_{\frac{Y\sqrt{X}}{1+\sqrt{X}}\leqq N\mathfrak{b}<Y} N\mathfrak{b}^{\sigma-2}\ll\sqrt{Y}\int_{Y-\frac{Y}{1+\sqrt{X}}}^{Y} u^{\sigma-2}du=O(Y^{\sigma-\frac{1}{2}}X^{-\frac{1}{2}}).$$

Setzt man (6.6), (6.7) und (6.8) in (6.5) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{X})\,W(s)-\frac{1}{\sqrt{X}}W(s-1)&=O(t^{\frac{1}{2}-\sigma}X)+O(t^{1-2\sigma}X^{-\frac{1}{2}}Y^{\sigma})\\&=O(X^{\frac{1}{2}-\sigma})\end{aligned}$$

und nach (6.4) Satz 1.

§ 7. Abschätzung von $|\zeta(\sigma+it)|$ für große t.

Als eine erste Anwendung der approximativen Funktionalgleichung geben wir eine Verbesserung der bekannten[13]) Abschätzung von $|\zeta(s,\mathfrak{K})|$ im kritischen Streifen:

Satz 3. *Für $t\geqq C$ gilt gleichmäßig*

$$\begin{aligned}|\zeta(\sigma+it,\mathfrak{K})|&=O(t^{1-\sigma})\quad\text{für}\quad 0<\delta\leqq\sigma\leqq 1-\delta\\ |\zeta(1+it,\mathfrak{K})|&=O(\log t)\\ |\zeta(it,\mathfrak{K})|&=O(t\log t).\end{aligned}$$

[13]) Vgl. LANDAU [2], Satz 171.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 1, indem man $X = Y = \frac{t\sqrt{d}}{2\pi}$ setzt und die Summe nach Hilfssatz 1 auswertet.

Als eine weitere Anwendung geben wir eine Abschätzung des Mittelwertes von $|\zeta_K(\frac{1}{2}+it)|^2$.

Satz 4[14]). *Es ist*

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\zeta_K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt = O(\log T).$$

Zum Beweis gehen wir von der approximativen Funktionalgleichung mit $X = Y = ct$ aus:

$$\begin{aligned}\zeta_K(\tfrac{1}{2}-it) &= \sum_{N\mathfrak{a}<ct} N\mathfrak{a}^{-\frac{1}{2}-it} + \psi(\tfrac{1}{2}-it)\sum_{N\mathfrak{b}<ct} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{2}+it} + O(1)\\ &= S(t) + \psi\,\overline{S(t)} + O(1).\end{aligned}$$

Da $|\psi(\frac{1}{2}+it)| = 1$, folgt daraus

$$\begin{aligned}|\zeta_K(\tfrac{1}{2}+it)|^2 &= [S(t) + \psi\,\overline{S(t)} + O(1)]\,[\overline{S(t)} + \overline{\psi}\,S(t) + O(1)]\\ &= 2|S(t)|^2 + \psi\,\overline{S(t)^2} + \overline{\psi}\,S(t)^2 + O(|S(t)|) + O(1)\\ &\leq 4|S(t)|^2 + O(|S(t)|) + O(1).\end{aligned}$$

Mithin ist

$$\int_{-T}^{T}|\zeta_K(\tfrac{1}{2}+it)|^2 dt \leq 8\int_0^T |S(t)|^2 dt + O\left\{\int_0^T |S(t)|\,dt\right\}. \tag{7.1}$$

Für das Integral rechts ergibt sich nach der Definition von $S(t)$:

$$\int_0^T |S(t)|^2 dt = \int_0^T \sum_{\substack{N\mathfrak{a}<ct\\ N\mathfrak{b}<ct}} \frac{1}{\sqrt{N\mathfrak{a}\,N\mathfrak{b}}}\left(\frac{N\mathfrak{b}}{N\mathfrak{a}}\right)^{it} dt = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}<cT\\ N\mathfrak{b}<cT}} \frac{1}{\sqrt{N\mathfrak{a}\,N\mathfrak{b}}}\int_{T_1}^{T}\left(\frac{N\mathfrak{b}}{N\mathfrak{a}}\right)^{it} dt,$$

wobei

$$T_1 = \frac{1}{c}\max(N\mathfrak{a}, N\mathfrak{b}).$$

Die Integration läßt sich jetzt leicht ausführen, und wir erhalten

$$\int_0^T |S(t)|^2 dt \leq T\sum_{N\mathfrak{a}<cT}\frac{1}{N\mathfrak{a}} + \sum_{\substack{N\mathfrak{a}<cT\\ N\mathfrak{b}<cT}}{}' \frac{1}{\sqrt{N\mathfrak{a}\,N\mathfrak{b}}\left|\log\frac{N\mathfrak{b}}{N\mathfrak{a}}\right|}, \tag{7.2}$$

wobei der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß die Glieder mit $N\mathfrak{a} = N\mathfrak{b}$ auszulassen sind. Für die erste Summe haben wir nach Hilfssatz 1

$$\sum_{N\mathfrak{a}<cT}\frac{1}{N\mathfrak{a}} = O(\log T). \tag{7.3}$$

[14]) Die Beschränkung auf $\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{R}}\zeta(s,\mathfrak{R})$ ist nicht wesentlich, sondern dient nur zur Schreibvereinfachung.

Die zweite Summe macht etwas mehr Mühe; wegen der Symmetrie ist

$$(7.4)\qquad \sum_{\substack{Na<cT\\ Nb<cT}}{}' = 2\cdot \sum_{Nb<cT}\ \sum_{Na<Nb} = 2\sum_{Nb<cT}\left\{\sum_{Na<\frac{1}{e^2}Nb} + \sum_{\frac{1}{e^2}Nb<Na<Nb}\right\}$$

Die Glieder der inneren Summen sind monoton (im ersten Falle fallend, im zweiten Falle wachsend); wir können daher Hilfssatz 1 anwenden und erhalten

$$(7.5)\qquad \sum_{Na<\frac{1}{e^2}Nb} \frac{1}{\sqrt{Na}\log\frac{Nb}{Na}} \ll \int_1^{\frac{1}{e^2}Nb} \frac{du}{\sqrt{u}\log\frac{Nb}{u}} \leqq \int_1^{\frac{1}{e^2}Nb} \frac{du}{\sqrt{u}} = O\left(\sqrt{Nb}\right),$$

$$\sum_{\frac{1}{e^2}Nb<Na<Nb} \frac{1}{\sqrt{Na}\log\frac{Nb}{Na}} \ll \int_{\frac{1}{e^2}Nb}^{Nb-1} \frac{du}{\sqrt{u}\log\frac{Nb}{u}} = \int_1^{Nb\left(1-\frac{1}{e^2}\right)} \frac{dv}{\sqrt{Nb-v}\log\frac{Nb}{Nb-v}}.$$

Nun ist

$$\log\frac{Nb}{Nb-v} = \log\left(1+\frac{v}{Nb-v}\right) \geq C\frac{v}{(Nb-v)}$$

und daher

$$(7.6)\qquad \sum_{\frac{1}{e^2}Nb<Na<Nb} \frac{1}{\sqrt{Na}\log\frac{Nb}{Na}} \ll \int_1^{Nb\left(1-\frac{1}{e^2}\right)} \sqrt{Nb-v}\,\frac{dv}{v} = O\left(\sqrt{Nb}\log Nb\right).$$

Setzt man (7.5) und (7.6) in (7.4) ein, so ergibt sich

$$(7.7)\qquad \sum_{\substack{Na<cT\\ Nb<cT}}{}' \frac{1}{\sqrt{Na\,Nb}\left|\log\frac{Nb}{Na}\right|} \ll \sum_{Nb<cT} \log Nb = O(T\log T)$$

und somit nach (7.3) und (7.2):

$$(7.8)\qquad \int_0^T |S(t)|^2\,dt = O(T\log T).$$

Der Beweis von Satz 4 folgt nun sofort aus (7.1) unter Anwendung der SCHWARZschen Ungleichung und (7.8):

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T} \left|\zeta_K\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt &\ll (T\log T) + \left\{T\int_0^T |S(t)|^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &= O(T\log T) + O\left(T(\log T)^{\frac{1}{2}}\right)\\ &= O(T\log T).\end{aligned}$$

Literatur.

[1] Čudakov, N.: On Goldbach-Vinogradovs theorem. Ann. Math. (2) **48**, 515—545 (1947). — [2a] Hardy, G. H., and J. E. Littlewood: The zeros of Riemanns zetafunction on the critical line. Math. Z. **10**, 283—317 (1921). — [2b] Hardy, G. H., and J. E. Littlewood: The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisor-problems of Dirichlet and Piltz. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **21**, 39—74 (1922). — [2c] Hardy, G. H., and J. E. Littlewood: The approximate functional equations for $\zeta(s)$ and $\zeta^2(s)$. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **29**, 81—97 (1929). — [3] Hecke, E.: Analytische Funktionen und algebraische Zahlen. I. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **1**, 102—126 (1923). — [4] Landau, E.: Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, 2. Aufl. Leipzig 1928. — [5] Mordell, L. J.: Poissons summation formula in several variables and some applications to the theory of numbers. Proc. Cambridge Phil. Soc. **25**, 412—420 (1929). — [6a] Siegel, C. L.: Neuer Beweis der Funktionalgleichung der Dedekindschen Zetafunktion. Math. Ann. **85**, 123—128 (1922). — [6b] Siegel, C. L.: Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie. Quellen u. Studien Geschichte Math. **2**, 45—80 (1931). — [7] Suetuna, Z.: Über die approximative Funktionalgleichung für Dirichletsche L-Funktionen. Jap. J. Math. **9**, 111—116 (1932).

Marburg a. d. Lahn, Rotenberg 21.

(Eingegangen am 10. Juni 1952.)

Stoll, W.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 116—154 (1952)

Mehrfache Integrale auf komplexen Mannigfaltigkeiten.

Von

Wilhelm Stoll.

In dieser Arbeit werden Hilfsmittel bereitgestellt, die in anschließenden Arbeiten über Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher zum Beweis der beiden *Hauptsätze der Wertverteilungslehre* verwendet werden sollen[1]).

Im Falle einer Veränderlichen wurden die Hauptsätze von H. Weyl, J. Weyl und L. Ahlfors[2]) auf meromorphe Vektorfunktionen $\mathfrak{w}(z)$, die eine Riemannsche Fläche über der z-Ebene in den projektiven Raum $\mathfrak{P}^{2m}$ abbilden, übertragen. Auch im Falle von n unabhängigen Veränderlichen werden spätere Arbeiten im wesentlichen alle Sätze von Weyl [*14*] als gültig erweisen. Insbesondere wird sich später ergeben:

Die $2n$-dimensionale, komplexe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ enthalte die (veränderliche) offene Menge G mit Rand Γ, und G seinerseits die (feste) offene Menge g mit Rand γ. Eine meromorphe Fläche $\mathfrak{w}(P) = (w_1(P), \ldots, w_m(P))$ sei dasselbe wie eine Abbildung von $\mathfrak{M}^{2n}$ in den projektiven Raum $\mathfrak{P}^{2m}$. Jedem Vektor $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ sei die Fläche $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}) \subseteqq \mathfrak{M}^{2n}$ der Nullstellen von $\sum_{\mu=1}^{m} w_\mu(P)\,\alpha_\mu$ zugeordnet. Die meromorphe Fläche $\mathfrak{w}(P)$ habe die später einzuführende Charakteristik $T(G) = \int_G \ldots$, die Schmiegungsfunktion $m(\Gamma, \vec{\alpha}) = \int_\Gamma \ldots$, und die Anzahlfunktion $N(G, \vec{\alpha}) = \int_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha})} \ldots$. Dann gilt der 1. *Hauptsatz*:

$$T(G) = N(G, \vec{\alpha}) + m(\Gamma, \vec{\alpha}) - m(\gamma, \vec{\alpha}) \tag{0.1}$$

für alle Vektoren $\vec{\alpha}$ und alle „*zulässigen*" G. Ebenso gilt unter einigen weiteren Voraussetzungen der 2. *Hauptsatz*:

$$\sum_{\nu=1}^{q} m(\Gamma, \vec{\alpha}) \leq (m + \varepsilon)\, T(G) \tag{0.2}$$

für alle ganzen $q > 0$, alle $\varepsilon > 0$, und die „*meisten*" zulässigen G.

Als Spezialfall erhält man den 1. Hauptsatz, wie ihn H. Kneser [*6*] für im ganzen $\mathfrak{z}$-Raum meromorphe Funktionen $f(\mathfrak{z}) = f(z_1, \ldots, z_n)$ bewiesen hat. Für Funktionen endlicher Ordnung bewies H. Kneser darüber hinaus eine Verallgemeinerung der Weierstrassschen Produktdarstellung[3]). Er geht in

[1]) Vergleiche [*8*] Kap. VI und IX. Die Nummer [*8*] bezieht sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

[2]) Vergleiche H. Weyl und J. Weyl [*14*].

[3]) Vergleiche [*8*] Kap. VIII und [*6*].

ihr — im Falle $n=1$ — zum Logarithmus über: $\log f(y)=g(y)+\sum\ldots$; der Summe entspricht im Falle $n>1$ ein Integral über die Fläche $\mathfrak{N}$ der Pol- und Nullstellen: $\log f(\mathfrak{y})=g(\mathfrak{y})+\int\limits_{\mathfrak{N}}\ldots$. In beiden Fällen ist g ein Polynom. Da die Integraldarstellung jedoch nur in einer Umgebung des Nullpunktes gilt, ist es keineswegs trivial, daß unter der notwendigen Konvergenzvoraussetzung das Integral $\int\limits_{\mathfrak{N}}$ überhaupt den Logarithmus einer im $\mathfrak{y}$-Raum meromorphen Funktion $f(\mathfrak{y})$ liefert, und daß diese auf $\mathfrak{N}$ und nur auf $\mathfrak{N}$ verschwindet bzw. unendlich wird, und zwar mit der vorgeschriebenen Vielfachheit. Der Beweis, den H. Kneser [5] hierfür im Falle $n=2$ gegeben hat, läßt sich anscheinend nicht unmittelbar auf $n>2$ übertragen. Daher wird ein anderer Weg eingeschlagen werden.

Hierbei, sowie bei den Hauptsätzen, lassen sich drei Beweistypen unterscheiden: 1. Beweise, die genau so wie im Falle $n=1$ verlaufen; 2. Beweise, die keine Analogie zum Falle $n=1$ zeigen; 3. Beweise, die in Anlage und Methode dem Fall $n=1$ ähnlich sind, jedoch in ihrer Durchführung auf größere Schwierigkeiten stoßen. Statt Nullstellen treten nämlich jetzt Nullstellenflächen, statt Randkurven Randflächen, statt Summen Integrale, statt Summenumformungen Integralumformungen auf. Die Integrationsbereiche liegen auf komplexen Mannigfaltigkeiten $\left[\text{z.B.: } T(G)=\int\limits_{G}\ldots\right]$, auf Nullstellenflächen $\left(\text{z.B.: } N(G,\vec{\alpha})=\int\limits_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha})}\ldots \text{ oder } \log f=g+\int\limits_{\mathfrak{N}}\ldots\right)$, die bis auf Singularitäten auch komplexe Mannigfaltigkeiten sind, und auf Randflächen $\left(\text{z.B.: } m(\Gamma,\vec{\alpha})=\int\limits_{\Gamma}\ldots\right)$, die bestenfalls differenzierbare oder reellanalytische Mannigfaltigkeiten sind.

Das Ziel dieser Arbeit ist es nun, diejenigen Sätze der Integrationstheorie bereitzustellen, mit deren Hilfe es in späteren Arbeiten gelingen wird, die erwähnten Schwierigkeiten zu überwinden. In § 1 und § 2 werden die Integrale auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten eingeführt und ihre Rechenregeln, insbesondere die Sätze von Fubini und Stokes, bewiesen. Ein Maßbegriff ist auf der Mannigfaltigkeit nicht vorhanden. Da sich eine Mannigfaltigkeit im kleinen wie ein Zahlenraum verhält, soll ein Integral „im kleinen" ein Integral im Zahlenraum sein. Um dabei vom Ortsparameter unabhängig zu sein, muß man als Integranden ein alternierendes Differential oder, was dasselbe ist, eine Dichte wählen. In § 3 werden die Verhältnisse im Vektorraum betrachtet. Die Existenz der Integrale über Nullstellenflächen und gewisse Integralumformungen werden hier auch für den Fall bewiesen, daß die Nullstellenflächen singuläre Stellen enthalten. Dies war bei H. Kneser noch nicht durchgeführt worden.

Im übrigen erheben diese vorbereitenden Sätze keinen Anspruch auf wesentliche Neuheit des Inhaltes; es kommt vielmehr darauf an, ihnen die später gebrauchte Form zu geben. Daher wird auch darauf verzichtet, die Voraussetzungen auf ein Minimum herabzudrücken.

§1. Integrale auf Mannigfaltigkeiten.

Die Theorie der Integrale auf Mannigfaltigkeiten werde hier auf Differenzierbarkeitseigenschaften gegründet:

Definition 1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

Ein HAUSDORFF*scher Raum* $\mathfrak{M}^k$ *heiße eine k-dimensionale, l-mal stetig-differenzierbare bzw. reellanalytische Mannigfaltigkeit, wenn jedem Punkt* $P \in \mathfrak{M}^k$ *eine Menge* $\mathfrak{P}_P(\mathfrak{M}^k) = \mathfrak{P}_P \neq \emptyset$ *von Abbildungen* $\alpha = \alpha(\mathfrak{t})$ *zugeordnet ist, so daß gilt:*

1. *Zu jedem* $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ *gibt es wenigstens eine „durch α uniformisierbare Umgebung* $U(P)$ *von* P" *(abgekürzt:* $U(P|\alpha)$*), d.h.*

a) Eine offene Menge $U'(P)$ *des reellen* $\mathfrak{t} = (t_1, \ldots, t_k)$*-Raumes wird durch* $\alpha(\mathfrak{t})$ *topologisch auf* $U(P)$ *abgebildet, wobei* $\alpha(0) = P$ *ist.*

b) Hat $t_1 = U'(P)$ *den Bildpunkt* $Q = \alpha(t_1)$*, so gehört die Abbildung* $\alpha(\mathfrak{t} + t_1)$ *zu* $\mathfrak{P}_Q$*.*

2. *Sind* $\alpha(\mathfrak{t})$ *und* $\beta(\mathfrak{x})$ *zwei Abbildungen aus* $\mathfrak{P}_P$*, so ist die Abbildung* $\mathfrak{x}(\mathfrak{t}) = \beta^{-1}\alpha(\mathfrak{t})$ *in einer Nullpunktsumgebung l-mal stetig differenzierbar bzw. reell-analytisch. (Im Falle* $l > 0$ *ist die Funktionaldeterminante* $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{t}} \neq 0$*.)*

Im Falle $l > 0$ *heißt die Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^k$ *orientiert, wenn außerdem gilt:*

3. *In 2. ist* $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{t}} > 0$.

Die Mengen $\mathfrak{P}_P^-$ der Abbildungen $\alpha(-t_1, \ldots, t_k)$ mit $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_P = \mathfrak{P}_P^+$ erfüllen 1.–3. und orientieren eine orientierte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k = \mathfrak{M}_+^k$ zu $\mathfrak{M}_-^k$ um.

Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ heiße *komplex*, wenn $k = 2n$ gerade ist, und für $x_{2\nu-1} + i\, x_{2\nu} = w_\nu$, $t_{2\nu-1} + i\, t_{2\nu} = z_\nu$ die vermittelnde Abbildung $\mathfrak{w}(\mathfrak{z}) = \beta^{-1}\alpha(\mathfrak{z})$ im Nullpunkt komplexanalytisch ist. Eine komplexe Mannigfaltigkeit ist wegen $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{t}} = \left|\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \mathfrak{z}}\right|^2 > 0$ immer orientiert.

Erfüllen die Abbildungsmengen $\mathfrak{P}_P^* \geqq \mathfrak{P}_P$ die Forderungen 1.–3., so bilden sie eine Erweiterung der $\mathfrak{P}_P$. Die Vereinigung $\widetilde{\mathfrak{P}}_P = \bigcup \mathfrak{P}_P^*$ aller Erweiterungen ist eine maximale Erweiterung. Die $\mathfrak{P}_P$ werden weiterhin maximal angenommen.

Werden die Umgebung $U(P)$ durch $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_P$ und die Umgebung $U(Q)$ durch $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_Q$ uniformisiert, so ist wegen 1b die Abbildung $\mathfrak{x}(\mathfrak{t}) = \beta^{-1}\alpha(\mathfrak{t})$ für $\mathfrak{t} \in \alpha^{-1}\big(U(P) \cap U(Q)\big)$ l-mal stetig differenzierbar, bzw. reellanalytisch, bzw. komplexanalytisch und im Falle der Orientierung $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{t}} > 0$.

Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}^q$ heiße eine *Teilmannigfaltigkeit* von $\mathfrak{M}^k$, wenn gilt:

1. $\mathfrak{N}^q \subseteqq \mathfrak{M}^k$ *trägt die aus* $\mathfrak{M}^k$ *induzierte Topologie.*

2. *Zu jedem Punkt* $P \in \mathfrak{N}^q$ *und jeder Abbildung* $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_P(\mathfrak{M}^k)$ *gibt es in* $\mathfrak{M}^k$ *eine Umgebung* $U(P|\alpha)$*, eine Abbildung* $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_P(\mathfrak{N}^q)$ *und eine Umgebung* $V(P|\beta) \subseteqq U(P|\alpha) \cap \mathfrak{N}^q$*, so daß* $\alpha^{-1}\beta(\mathfrak{x})$ *in der Nullpunktsumgebung* $V'(P)$ *stetig ist, dieselben Differenzierbarkeitseigenschaften wie* $\mathfrak{N}^q$ *hat und im Falle eines orientierten* $\mathfrak{N}^q$ *die Matrix* $\left(\frac{\partial \alpha^{-1}\beta}{\partial \mathfrak{x}}\right)$ *den Rang q hat.*

Eine Menge M aus $\mathfrak{M}^k$ (bzw. eine komplexwertige Funktion auf M) heiße *meßbar*, *Nullmenge* (bzw. meßbar, l-mal — (stetig) — differenzierbar, reell-analytisch, analytisch), wenn es zu jedem Punkt $P \in \mathfrak{M}^k$ eine Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ und eine Umgebung $U(P|\alpha)$ gibt, so daß das Urbild $\alpha^{-1}(U(P|\alpha) \cap M) = M'$ im Parameterraum meßbar, bzw. eine Nullmenge [bzw. $f(\alpha(t))$ auf M' meßbar usw.] ist. Dies gilt wegen 2b dann für jedes $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ und jedes $U(P|\alpha)$. Vereinigung, Durchschnitt, Differenz und Produkt höchstens abzählbar vieler meßbaren Mengen (Nullmengen) sind wieder meßbar (Nullmengen). Die Funktion $f(P)$ ist dann und nur dann meßbar, wenn es alle Mengen $[\Re e\, f(P) \geqq c]_P$ und $[\Im m\, f(P) \geqq c]_P$[4]) sind. Summe, Differenz, Produkt, Quotient und Grenzwert meßbarer Funktionen sind wieder meßbar.

Die Summation über alle m-tupel ganzer Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_m$ mit $1 \leqq \nu_1 \leqq k, \ldots, 1 \leqq \nu_m \leqq k$ werde durch $\sum_{\nu m}^{k}$ abgekürzt. Tritt noch die Einschränkung $1 \leqq \nu_1 < \ldots < \nu_m \leqq k$ hinzu, so werde $\sum_{\nu m}^{k}{}'$ geschrieben. Nun definiert man:

Definition 2 (Dichte)[5]). *M sei eine Teilmenge der orientierten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ und m eine natürliche Zahl. Jedem Punkt $P \in M$, jeder Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ und jedem m-tupel ganzer Zahlen $1 \leqq \mu_1 < \ldots < \mu_m \leqq k$ sei eine komplexe Zahl $a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(P, \alpha)$ zugeordnet, so daß für jede andere Abbildung $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_P$ mit $\mathfrak{x}(t) = \beta^{-1}\alpha(t)$ gilt:*

$$(1.1) \qquad a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(P, \alpha) = \sum_{\nu m}^{k}{}' a_{\nu_1 \ldots \nu_m}(P, \beta) \frac{\partial(x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_m})}{\partial(t_{\mu_1}, \ldots, t_{\mu_m})}\Big|_{t=0}.$$

Dann heiße $a_{\mu_1 \ldots \mu_m}$ *Dichte m-ter Stufe*. Eine Dichte k-ter Stufe in einer k-dimensionalen Mannigfaltigkeit heiße kurz „*Dichte*".

Setzt man für einen beliebigen Punkt $Q \in M \cap U(P|\alpha)$ mit $Q = \alpha(t_1)$

$$(1.2) \qquad a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(Q, \alpha) = a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(Q, \alpha(t + t_1)),$$

so ist $a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(Q, \alpha)$ bei festen $\alpha, \mu_1, \ldots, \mu_m$ als Funktion von Q auf $M \cap U(P|\alpha)$, eindeutig erklärt. Beim Übergang von einer Abbildung $\alpha(t) \in \mathfrak{P}_{P_1}$ zu einer anderen $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_{P_2}$ gilt das Transformationsgesetz

$$(1.3) \qquad a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(Q, \alpha) = \sum_{\nu m}^{k}{}' a_{\nu_1 \ldots \nu_m}(Q, \beta) \frac{\partial(x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_m})}{\partial(t_{\mu_1}, \ldots, t_{\mu_m})}$$

für

$$\alpha(t) = \beta(\mathfrak{x}) = Q \in M \cap U(P_1|\alpha) \cap U(P_2|\beta).$$

Die Dichte m-ter Stufe $a_{\mu_1 \ldots \mu_m}$ habe auf M eine Eigenschaft (Meßbarkeit usw.), wenn es zu jedem Punkt $P \in \mathfrak{M}^k$ und jeder Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ eine Umgebung $U_1(P|\alpha)$ gibt, so daß $a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(Q, \alpha)$ als Funktion von Q auf $U_1(P|\alpha)$ für alle $\mu_1, \ldots, \mu_m$ diese Eigenschaft hat. Es wird abgekürzt: $a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(Q, \alpha) = a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(Q) = a_{\mu_1 \ldots \mu_m}$ und $a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(\alpha(t), \alpha) = a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(t; \alpha)$.

[4]) $[\mathfrak{A}]_P$ kürzer $[\mathfrak{A}]$, bezeichnet die Menge der Gegenstände P mit der Eigenschaft $\mathfrak{A}$.

[5]) Für $m = k$ vergleiche [*14*], Kap. III, § 3.

Gilt von zwei Dichten $a_{\mu_1 \dots \mu_m}(P, \alpha) = b_{\mu_1 \dots \mu_m}(P, \alpha)$ für ein α, so gilt die Gleichheit auch für alle Abbildungen α. Es ergibt sich: Gleichheit, Summe $a_{\mu_1 \dots \mu_m} + b_{\mu_1 \dots \mu_m}$, Produkt mit einer Funktion: $f \cdot a_{\mu_1 \dots \mu_m}$, Grenzübergang $a^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_m} \to a_{\mu_1 \dots \mu_m}$ hängen nicht von der Wahl von α ab und liefern wieder eine Dichte. Im Falle $m = k$ und einer orientierten Mannigfaltigkeit gilt das auch noch für Ungleichungen; denn aus $a(Q, \alpha) < b(Q, \alpha)$ folgt $a(Q, \beta) < b(Q, \beta)$ wegen $\frac{\partial \beta}{\partial t}^{1} \alpha > 0$. Mit $a(Q, \alpha)$ ist auch $|a(Q, \alpha)|$ eine Dichte. Das gestattet auf einer orientierten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ sinnvolle Integrale zu erklären. Die Dichte $a(Q, \alpha)$ heiße über M örtlich integrierbar, falls es zu jedem Punkt $P \in \mathfrak{M}^k$ eine Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ und eine Umgebung $U(P|\alpha)$ gibt, für die $a(\alpha(\mathfrak{t}), \alpha)$ über $\alpha^{-1}(M \cap U(P|\alpha))$ integrierbar ist. Dies gilt dann auch für jede Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$, aber nicht unbedingt für jede Umgebung $U(P|\alpha)$.

Eine Teilmenge einer kompakten Menge heiße *beschränkt*. Eine Menge M heiße *kompakt überdeckbar*, wenn es höchstens abzählbar viele kompakte Mengen K_μ gibt, die M überdecken: $M \subseteqq \bigcup_{\mu=0}^{\infty} K_\mu$. Dabei kann O. B. d. A. $K_0 = \emptyset$ und $K_\mu \subseteqq K_{\mu+1}$ angenommen werden. Das Integral wird zunächst für einen beschränkten, dann für einen kompakt überdeckbaren Integrationsbereich erklärt. Im ersten Fall wird eine „DIEUDONNÉ-Zerlegung" benützt.

Satz 1. DIEUDONNÉ-Zerlegung[6]).

Voraussetzung. *Die Menge K sei ein kompakter Teil der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$. Es sei $V(P_\nu)$ eine offene Umgebung des Punktes $P_\nu \in K$ mit $K \subseteqq \bigcup_{\nu=1}^{n} V(P_\nu)$. Die abgeschlossene Hülle $\overline{V}(P_\nu)$ von $V(P_\nu)$ sei kompakt.*

Behauptung. *Auf $\mathfrak{M}^k$ gibt es stetige Funktionen $\lambda_\nu(P)$ mit:*

a) $0 \leq \lambda_\nu(P) \leq 1$ *für* $P \in \mathfrak{M}^k$ *und* $\lambda_\nu(P) = 0$ *für* $P \notin V(P_\nu)$.

b) $\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu(P) = 1$ *für* $P \in K$.

c) *Ist $\mathfrak{M}^k$ l-mal stetigdifferenzierbar, so können die $\lambda_\nu(P)$ auch l-mal stetig differenzierbar gewählt werden.*

Wie bei H. WEYL [*14*] Kap. III, § 3, S. 131 zeigt man zunächst, daß der Satz für eine geeignete Überdeckung $W(P_\nu)$ richtig ist. Dabei kann man noch annehmen, daß die $W(P_\nu)$ alle in einer beliebigen, K umfassenden, offenen Menge liegen. Es gibt offene Umgebungen $V_1(P_\nu)$ von P_ν mit $\overline{V}_1(P_\nu) \subset V(P_\nu)$, die K überdecken: $K \subseteqq \bigcup_{\nu=1}^{n} V(P_\nu)$. Eine DIEUDONNÉ-Zerlegung des kompakten $\overline{V}_1(P_\nu)$ liefert bei geeigneter Wahl der überdeckenden Umgebungen nach b) eine auf $\mathfrak{M}^k$ stetige Funktion $\varrho_\nu(P)$ mit $\varrho_\nu(P) = 1$ für $P \in \overline{V}_1(P_\nu)$ aber $\varrho_\nu(P) = 0$ für $P \notin V(P_\nu)$ und $0 \leq \varrho_\nu(P) \leq 1$ für $P \in \mathfrak{M}^k$. Wie bei WEYL konstruiert man aus den $\varrho_\nu(P)$ die $\lambda_\nu(P)$.

[6]) Vergleiche [*14*] Kap. III, § 3, S. 131 oder [*2*] Bd. III, Kap. IX, § 4, S. 66 oder [*10*] Bd. I, Kap. I, § 2, S. 23.

Satz 2. Integrale über beschränkte Mengen.

Voraussetzung. *Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ sei orientiert.*

Behauptung. *Zu jeder meßbaren, beschränkten Menge $M \subseteqq \mathfrak{M}^k$ und jeder örtlich über M integrierbaren Dichte ψ kann man eine Zahl $\int\limits_M \psi$ als Funktion von M und ψ angeben, die eindeutig durch die Forderungen bestimmt ist:*

1. *Sind a und b auf M konstant, und sind die Dichten ψ und χ über M örtlich integrierbar, so gilt:*

$$\int\limits_M (a\psi + b\chi) = a \int\limits_M \psi + b \int\limits_M \chi. \tag{1.4}$$

2. *Wählt man den Punkt $P \in \mathfrak{M}^k$, die Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ die Umgebung $U(P|\alpha)$ beliebig, und ist ψ über M örtlich integrierbar und verschwindet ψ auf $M - U(P|\alpha)$, so gilt mit $M' = \alpha^{-1}\big(U(P|\alpha) \cap M\big)$ die Gleichung*

$$\int\limits_M \psi = \int\limits_{M'} \psi(t;\alpha)\, dt_1 \dots dt_k. \tag{1.5}$$

$\int\limits_M \psi$ *heiße das Integral über M von ψ. Es ist von der kompakten Menge, in die man sich M eingebettet denkt, unabhängig.*

Der Beweis wird wie bei [*14*] Kap. III § 3, S. 130–135 geführt. Man wählt ein kompaktes $K \supseteqq M$, eine Dieudonné-Zerlegung λ_ν, $U(P_\nu|\alpha_\nu) = V(P_\nu)$ mit $\alpha_\nu \in \mathfrak{P}_{P_\nu}$ von K, wobei die $U(P_\nu|\alpha_\nu)$ so klein gewählt werden können, daß $\psi(t;\alpha_\nu)$ über das Urbild $M'_\nu = \alpha^{-1}\big(U(P_\nu|\alpha_\nu) \cap M\big)$ integrierbar ist. Dann zeigt man, daß die Definition

$$\int\limits_M \psi = \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{M'_\nu} \lambda_\nu\big(\alpha_\nu(t)\big)\, \psi(t;\alpha_\nu)\, dt_1 \dots dt_k \tag{1.6}$$

die Bedingungen 1 und 2 erfüllt und unabhängig von der Wahl der Dieudonné-Zerlegung sowie der überdeckenden Menge K ist.

Definition 4. (Integrierbarkeit im großen.) *M sei eine kompakt überdeckbare, meßbare Teilmenge der orientierten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$, also: $M \subseteqq \bigcup\limits_{\nu=0}^{\infty} K_\nu$ mit $K_0 = \emptyset$ und kompaktem $K_\nu \subseteqq K_{\nu+1}$. Die Dichte ψ sei über jede Menge $M \cap K_\nu$ örtlich integrierbar. Existiert der Grenzwert*

$$\lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{M\cap K_\nu} \psi = \int\limits_M \psi, \tag{1.7}$$

so heiße er das uneigentliche Integral von ψ über M bezüglich der Folge $\{K_\nu\}$; ψ heiße uneigentlich integrierbar. Ist aber auch $|\psi|$ uneigentlich integrierbar über M, so heiße ψ integrierbar über M und $\int\limits_M \psi$ das (eigentliche) Integral über M.

Integrierbarkeit und Integral hängen dann nicht von der Folge $\{K_\nu\}$ ab, wie gleich bewiesen wird.

Satz 3. Rechenregeln für Integrale.

1. *Ist $|\psi|$ bezüglich $\{K_\nu\}$ über M integrierbar, so sind ψ und $|\psi|$ bezüglich jeder Folge $\{K'_\nu\}$ über M integrierbar, und die Integrale hängen nicht von $\{K'_\nu\}$ ab. ψ wird meßbar vorausgesetzt.*

2. *Es gilt $\int\limits_M 0 = 0$ für jede meßbare Menge M und $\int\limits_N \psi = 0$ für jede meßbare Dichte ψ und jede Nullmenge N.*

3. *Sind a und b auf M konstant, so ist mit ψ und χ auch $a\psi + b\chi$ über M integrierbar. Es gilt*

$$\int\limits_M (a\psi + b\chi) = a\int\limits_M \psi + b\int\limits_M \chi. \tag{1.8}$$

4. *Ist ψ über M integrierbar, so auch über jedes meßbare $N \subseteq M$. Es gilt:*

$$\left|\int\limits_N \psi\right| \leq \int\limits_M |\psi|. \tag{1.9}$$

5. *Ist ψ über M_1 und M_2 integrierbar, so auch über $M = M_1 \cup M_2$. Es gilt:*

$$\int\limits_M \psi = \int\limits_{M_1} \psi + \int\limits_{M_2} \psi - \int\limits_{M_1 \cap M_2} \psi. \tag{1.10}$$

6. *Sind ψ und χ über M integrierbar, und ist $\psi \leq \chi$, so gilt $\int\limits_M \psi \leq \int\limits_M \chi$.*

7. *Ist ψ meßbar auf M, χ integrierbar über M mit $|\psi| \leq \chi$, so ist ψ über M integrierbar.*

8. *Sind die meßbaren Mengen M_ν paarweise punktfremd, und ist die Dichte ψ über die Vereinigung $M = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$ integrierbar, so gilt*

$$\int\limits_M \psi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int\limits_{M_\nu} \psi. \tag{1.11}$$

Beweis. $|\psi|$ sei über $M = \bigcup\limits_{\mu=1}^{\infty} M_\mu$ bezüglich $\{K_\nu\}$ integrierbar; die meßbaren Mengen M_μ seien paarweise punktfremd. $\lambda_\varrho^{(\nu)}$, $\varrho = 1, \ldots, n_\nu$ sei eine DIEUDONNÉ-Zerlegung von K_ν. Setzt man $T_\nu = K_\nu - K_{\nu-1}$ für $\nu \geq 1$, so gilt:

$$\left\{\begin{aligned}
\int\limits_M |\psi| &= \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{M\cap K_\nu} |\psi| \qquad\qquad = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int\limits_{M\cap T_\nu} |\psi| \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\varrho=1}^{n_\nu} \int\limits_{M\cap T_\nu} \lambda_\varrho^{(\nu)} |\psi| \qquad = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\varrho=1}^{n_\nu} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int\limits_{M_\mu \cap T_\nu} \lambda_\varrho^{(\nu)} |\psi| \\
&= \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\varrho=1}^{n_\nu} \int\limits_{M_\mu\cap T_\nu} \lambda_\varrho^{(\nu)} |\psi| = \sum_{\mu=1}^{\infty} \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{M_\mu\cap K_\nu} |\psi| \\
&= \sum_{\mu=1}^{\infty} \int\limits_{M_\mu} |\psi|.
\end{aligned}\right. \tag{1.12}$$

Also ist $|\psi|$ über jedes M_μ bezüglich $\{K_\nu\}$ integrierbar. Daraus folgt 4. und 8. für $|\psi|$. Werden der Punkt $P \in \mathfrak{M}^k$, die Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ und die Umgebung

$U(P|\alpha)$ beliebig gewählt, setzt man $N = M \cap U(P|\alpha)$, $N' = \alpha^{-1}(N)$ und $K'_\nu = \alpha^{-1}(U(P|\alpha) \cap K_\nu)$, so gilt:

$$(1.13)\qquad \begin{cases} \int\limits_N |\psi| = \lim\limits_{\nu\to\infty} \int\limits_{N\cap K_\nu} |\psi| \\ \qquad = \lim\limits_{\nu\to\infty} \int\limits_{N'\cap K'_\nu} |\psi(t;\alpha)|\, dt_1 \dots dt_k = \int\limits_{N'} |\psi(t;\alpha)|\, dt_1 \dots dt_k . \end{cases}$$

$|\psi|$, also auch ψ ist über M örtlich integrierbar. Nach (1.12) gilt:

$$(1.14)\qquad \int\limits_M |\psi| \geqq \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\varrho=1}^{n_\nu} \int\limits_{M_\mu\cap T_\nu} \lambda_\varrho^{(\nu)} \psi \Big| = \sum_{\mu=1}^{\infty} \Big| \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{M_\mu\cap K_\nu} \psi \Big| = \sum_{\mu=1}^{\infty} \Big| \int\limits_{M_\mu} \psi ,$$

Daher ist ψ über jedes M_μ integrierbar. Speziell folgt für $M_1 = M$ und $M_\mu = \emptyset$ für $\mu > 1$ die Integrierbarkeit von ψ über M. Aus (1.14) folgt 4. Nach dem Majorantenkriterium gilt (1.12) dann auch für ψ statt $|\psi|$. Damit ist 8. bewiesen. Überdecken die kompakten Mengen K'_μ die Menge $M \subseteqq \bigcup_{\mu=0}^{\infty} K'_\mu$ mit $K'_0 = \emptyset$ und $K'_\mu \subseteqq K'_{\mu+1}$ und setzt man $M_\mu = M \cap (K'_\mu - K'_{\mu-1})$, so gibt (1.12) die Beziehungen $\int\limits_M |\psi| = \lim\limits_{\mu\to\infty} \int\limits_{M\cap K'_\mu} |\psi|$ und $\int\limits_M \psi = \lim\limits_{\mu\to\infty} \int\limits_{M\cap K'_\mu} \psi$. Also gilt 1. Für beschränktes M stimmen die Integralbegriffe von Satz 2 und Definition 4 überein. Nun folgen mittels der DIEUDONNÉ-Zerlegung $\lambda_\varrho^{(\nu)}$ für $M \cap K_\nu$ und anschließendem Grenzübergang $\nu \to \infty$ unmittelbar die Behauptungen 2.—7. für $|\psi|$ und dann auch für ψ, w. z. b. w.

Satz 4. Grenzwertsätze.

1. Voraussetzung. *χ sei über M integrierbar, ψ_ν sei meßbar, $|\psi_\nu| \leq \chi$ und $\psi_\nu \to \psi$ für $\nu \to \infty$ auf M.*

Behauptung. *ψ, ψ_ν sind über M integrierbar. Es ist*

$$\int\limits_M \psi = \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_M \psi_\nu .$$

2. Voraussetzung. *ψ_ν, χ seien über M integrierbar, $\psi_\nu \geqq \chi$. Es sei*

$$\lim_{\nu\to\infty} \psi_\nu = \psi \leqq \infty .$$

Behauptung.

a) $\int\limits_M \psi \leqq \varliminf\limits_{\nu\to\infty} \int\limits_M \psi_\nu \leqq \infty$.

b) *Wenn $\varliminf\limits_{\nu\to\infty} \int\limits_M \psi_\nu < \infty$ ist, so existiert das Integral $\int\limits_M \psi$, und die ψ_ν konvergieren fast überall auf M gegen ψ.*

3. Voraussetzung. *ψ_ν sei über M integrierbar. Es strebe $\psi_\nu \nearrow \psi \leqq \infty$ für $\nu \to \infty$.*

Behauptung. $\int\limits_M \psi = \lim\limits_{\nu\to\infty} \int\limits_M \psi_\nu \leqq \infty$.

Der Beweis ergibt sich für beschränktes M sofort durch DIEUDONNÉ-Zerlegung. Ist M kompakt überdeckbar, d.h. $M \subseteqq \bigcup_{\nu=0}^{\infty} K_\nu$ mit kompaktem $K_\nu \subseteqq K_{\nu+1}$ und $K_0 = \emptyset$, so sei $M_\mu = M \cap (K_\mu - K_{\mu-1})$. In 1. folgt aus $|\psi_\nu| \leqq \chi$, also $|\psi| \leqq \chi$, die Integrierbarkeit von ψ_ν und ψ über M. Da die Reihe $\sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{M_\mu} \psi_\nu$ eine von ν unabhängige, konvergente Majorante $\sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{M_\mu} \chi = \int_M \chi$ besitzt, konvergiert sie gleichmäßig in ν. Also gilt:

$$\int_M \psi = \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{M_\mu} \psi = \sum_{\mu=1}^{\infty} \lim_{\nu\to\infty} \int_{M_\mu} \psi_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{M_\mu} \psi_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \int_M \psi_\nu .$$

In 2. gilt:

$$\int_{M\cap K_\nu} \psi \leqq \varlimsup_{\mu\to\infty} \int_{M\cap K_\nu} \psi_\mu \leqq \varlimsup_{\mu\to\infty} \int_M (\psi_\mu - \chi) + \int_{M\cap K_\nu} \chi .$$

Der Grenzübergang $\nu \to \infty$ gibt a). Ist $\varlimsup_{\mu\to\infty} \int_M \psi_\mu < \infty$, so existiert in b) wegen $\psi - \chi \geqq 0$ nach der letzten Abschätzung $\int_M (\psi - \chi)$, also auch $\int_M \psi$. Sind der Punkt $P \in \mathfrak{M}^k$, die Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ und die Umgebung $U(P|\alpha)$ beliebig gewählt, so ist $\infty > \varlimsup_{\nu\to\infty} \int_M (\psi_\nu - \chi) \geqq \varlimsup_{\nu\to\infty} \int_{M\cap U(P|\alpha)} (\psi_\nu - \chi)$. Setzt man die Menge $[\psi = \infty]_P = N$, so ist $\alpha^{-1}\big(U(P|\alpha) \cap M \cap N\big)$ also auch $M \cap N$ eine Nullmenge. Damit ist 2. bewiesen. In 3. ist wegen $\psi_\nu \leqq \psi$ auch $\varlimsup_{\nu\to\infty} \int_M \psi_\nu \leqq \int_M \psi$. Mit 2. folgt die 3. Behauptung, w. z. b. w.

Ist $\psi(P, \alpha)$ über $M \subseteqq \mathfrak{M}^k$ integrierbar, so geht bei der im Anschluß an Definition 1 erklärten Umorientierung von $\mathfrak{M}^k = \mathfrak{M}^k_+$ in $\mathfrak{M}^k_-$ eine Menge $M = M_+$ in M_-, eine Dichte $\psi(P, \alpha)$ in eine Dichte $\psi^*(P; \beta) = \psi(P, \alpha) \left.\frac{\partial \alpha^{-1}\beta}{\partial \mathfrak{x}}\right|_{\mathfrak{x}=0}$ mit $\alpha \in \mathfrak{P}^+_P$, $\beta \in \mathfrak{P}^-_P$ über. Wegen $\frac{\partial \alpha^{-1}\beta}{\partial \mathfrak{x}} < 0$ gilt $\int_{M_+} \psi = -\int_{M_-} \psi^*$.

§ 2. Integrale und Differentiale.

Der Raum der *Tensoren k-ter Dimension und m-ter Stufe* entsteht aus dem $k \cdot m$-dimensionalen Vektorraum über dem Ring der komplexen Zahlen, wenn man die Grundvektoren in der Form $\tilde{\mathfrak{e}}_{i_1} \tilde{\mathfrak{e}}_{i_2} \dots \tilde{\mathfrak{e}}_{i_m}$ mit $1 \leqq i_\mu \leqq k$, $\mu = 1, 2, \dots, m$ schreibt:

$$A = \sum_{i\,m}^{k} a_{i_1 \dots i_m} \tilde{\mathfrak{e}}_{i_1} \dots \tilde{\mathfrak{e}}_{i_m} \text{ [7]} \qquad (a_{i_1 \dots i_m} \text{ komplex}). \tag{2.1}$$

Ein solcher Tensor heiße eine *Polyade*[7] *m-ter Stufe*, wenn $a_{i_1 \dots i_m} = \operatorname{sign}\binom{i_1 \dots i_m}{j_1 \dots j_m} a_{j_1 \dots j_m}$ ist. Für $m = 1$ erhält man den k-dimensionalen, komplexen Vektorraum. Das *äußere Produkt* der Vektoren $\mathfrak{a}_\mu = \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu^{(\mu)} \tilde{\mathfrak{e}}_\nu$ sei die *„spezielle"*

[7]) Vergleiche [14], Kap. I A, § 1.

Polyade

$$[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m] = \sum_{i\,m}^{k} \begin{vmatrix} a_{i_1}^{(1)}, \ldots, a_{i_m}^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i_1}^{(m)}, \ldots, a_{i_m}^{(m)} \end{vmatrix} \tilde{\mathfrak{e}}_{i_1} \cdot \tilde{\mathfrak{e}}_{i_2} \ldots \tilde{\mathfrak{e}}_{i_m}. \tag{2.2}$$

Diese Produkte erzeugen den $\binom{k}{m}$ dimensionalen Vektorraum der Polyaden m-ter Stufe

$$A = \sum_{i\,m}^{k} a_{i_1 \ldots i_m} \tilde{\mathfrak{e}}_{i_1} \ldots \tilde{\mathfrak{e}}_{i_m} = \sum_{i\,m}^{k}{}' a_{i_1 \ldots i_m} [\mathfrak{e}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{e}_{i_m}]\ ^{8}). \tag{2.3}$$

Eine Polyade 0-ter Stufe sei eine Zahl.

Zwischen den Polyaden wird ein assoziatives und distributives Produkt

$$A \cdot B = \sum_{i\,p}^{k} \sum_{j\,q}^{k}{}' a_{i_1 \ldots i_p} b_{j_1 \ldots j_q} [\mathfrak{e}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{e}_{i_p}, \mathfrak{e}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{e}_{j_q}] = (-1)^{pq} B A \tag{2.4}$$

erklärt. Die Vertauschungsregel $A B = (-1)^{pq} B A$ heiße *alternierend*. Es ist $[\mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$ und $[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_p] [\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_q] = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_p, \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_q]$.

Diese Vektorprodukte dienen zur Definition der *alternierenden Differentiale*[9]). Der reellen unabhängigen Veränderlichen x_ν wird eine neue reelle unabhängige Veränderliche dx_ν zugeordnet. Es sei $\partial x_\nu = dx_\nu \mathfrak{e}_\nu$. Wegen $[\partial x_\nu] = \partial x_\nu$ kann man $[\partial x_{\mu_1}, \ldots, \partial x_{\mu_m}] = \partial x_{\mu_1} \ldots \partial x_{\mu_m}$ setzen. Sind die Funktionen $a_{\nu_1 \ldots \nu_m}(\mathfrak{x})$ alle auf einer gemeinsamen Menge M erklärt, so bilden die *„alternierenden Differentiale m-ter Stufe" auf M*

$$\partial A^m = \sum_{\nu\,m}^{k}{}' a_{\nu_1 \ldots \nu_m} \partial x_{\nu_1} \ldots \partial x_{\nu_m} \tag{2.5}$$

einen Modul. Ein alternierendes Differential 0-ter Stufe ist eine Funktion. Das Produkt $\partial A^p \partial B^q$ ist vermöge (2.4) assoziativ, distributiv und alternierend. Sind die Funktionen f und f_ν auf M differenzierbar, so sind

$$\partial f = \sum_{\nu=1}^{k} f_{x_\nu} \partial x_\nu, \tag{2.6}$$

$$\partial f_1 \ldots \partial f_m = \sum_{\nu\,m}^{k}{}' \frac{\partial (f_1, \ldots, f_m)}{\partial (x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_m})} \partial x_{\nu_1} \ldots \partial x_{\nu_m} \tag{2.7}$$

Beispiele alternierender Differentiale.

Die *Ableitung* eines alternierenden Differentials ∂A^m mit stetigdifferenzierbaren Koeffizienten sei

$$\partial \partial A^m = \sum_{\nu\,m}^{k}{}' \partial a_{\nu_1 \ldots \nu_m} \partial x_{\nu_1} \ldots \partial x_{\nu_m}. \tag{2.8}$$

[8]) Zur Bezeichnung der Summation vergleiche S. 119.

[9]) Vergleiche zum Begriff des alternierenden Differentials auch [4].

Es gelten die Rechenregeln

$$\partial(\partial A^p \partial B^q) = \partial\partial A^p \partial B^q + (-1)^p \partial A^p \partial\partial B^q \tag{2.9}$$

$$\partial(\partial A^p + \partial B^p) = \partial\partial A^p + \partial\partial B^p \tag{2.10}$$

$$\partial(\partial\partial A^p) = 0, \tag{2.11}$$

wenn ∂A^p in (2.11) zweimal stetigdifferenzierbare Koeffizienten hat.

Die Menge M des $\mathfrak{y}$-Raumes werde durch $\mathfrak{x}(\mathfrak{y})$ differenzierbar in die Menge N des $\mathfrak{x}$-Raumes abgebildet. Dann ist die Substitution σ

$$\begin{cases} \sigma\,\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\mathfrak{y}), \quad \sigma\,\partial x_\mu = \partial\sigma\, x_\mu, \quad \sigma f(\mathfrak{x}) = f(\sigma\,\mathfrak{x}), \\ \sigma\,\partial A^m = \sum_{\nu|m}^{k}{}' \sigma\, a_{\nu_1 \dots \nu_m} \cdot \sigma\,\partial x_{\nu_1} \dots \sigma\,\partial x_{\nu_m} \end{cases} \tag{2.12}$$

ein Homomorphismus der alternierenden Differentiale auf M in die alternierenden Differentiale auf N. Ist $\mathfrak{x}(\mathfrak{y})$ zweimal stetigdifferenzierbar, so ist σ bezüglich des Operators ∂ ein Modulhomomorphismus.

Auf einer Menge M einer orientierten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ sei eine Dichte m-ter Stufe $a_{\mu_1 \dots \mu_m}$ gegeben. Werden der Punkt $P \in \mathfrak{M}^k$, die Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ und die Umgebung $U(P|\alpha)$ beliebig gewählt, so sei durch

$$\partial A^m(Q, \alpha) = \sum_{\mu|m}^{k}{}' a_{\mu_1 \dots \mu_m}(Q, \alpha)\, \partial t_{\mu_1} \dots \partial t_{\mu_m} \tag{2.13}$$

mit $Q \in M \cap U(P|\alpha)$ ein *alternierendes Differential m-ter Stufe auf* M erklärt. Es besitze eine gewisse Eigenschaft, wenn der zugehörigen Dichte diese Eigenschaft zukommt. Man kürzt wieder ab:

$$\partial A^m(Q, \alpha) = \partial A^m(Q) = \partial A^m \quad \text{und} \quad \partial A^m(\alpha(\mathfrak{t}), \alpha) = \partial A^m(\mathfrak{t}; \alpha).$$

Wählt man die Abbildungen $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_{P_1}$ und $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_{P_2}$, sowie die uniformisierbaren Umgebungen $U(P_1|\alpha)$ und $U(P_2\,\beta)$ beliebig, so gilt für $\beta^{-1}\alpha(\mathfrak{t}) = \mathfrak{x}(\mathfrak{t})$ nach (1.3) und (2.7)

$$\partial A^m(Q, \alpha) = \sum_{\mu|m}^{k}{}' a_{\mu_1 \dots \mu_m}(Q, \beta)\, \partial x_{\mu_1}(\mathfrak{t}) \dots \partial x_{\mu_m}(\mathfrak{t}) \tag{2.14}$$

mit $\alpha(\mathfrak{t}) = \beta(\mathfrak{x}) = Q \in U(P_1|\alpha) \cap U(P_2|\beta) \cap M$. Da in (2.12) die Abbildung σ ein Homomorphismus ist, sind Gleichheit, Summe, Produkt, Grenzwert von alternierenden Differentialen unabhängig von der Wahl von α erklärt. Dies gilt auch für die Ableitung, wenn $\mathfrak{M}^k$ zweimal stetigdifferenzierbar ist.

Definition 5. (Stetigdifferenzierbare Abbildungen.) *Durch $\sigma(Q)$ werde die offene Menge W der l-mal stetigdifferenzierbaren, orientierten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}^q$ in die l-mal stetigdifferenzierbare, orientierte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ abgebildet. Die Abbildung σ heiße l-mal stetigdifferenzierbar, wenn es zu jedem Punkt $S \in W$ und seinem Bildpunkt $R = \sigma(S)$ eine Abbildung $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_R(\mathfrak{M}^k)$, eine Umgebung $U(R|\alpha) \subseteq \mathfrak{M}^k$, eine Abbildung $\gamma(\mathfrak{w}) \in \mathfrak{P}_S(\mathfrak{N}^q)$ und eine Umge-*

bung $U(S|\gamma) \subseteq \mathfrak{R}^q$ *mit* $\sigma(U(S|\gamma)) \subseteq U(R|\alpha)$ *gibt, so daß die vermittelnde Abbildung* $\mathfrak{t}(\mathfrak{w}) = \alpha^{-1}\sigma\gamma(\mathfrak{w})$ *auf der Urbildmenge* $U'(S|\gamma)$ *l-mal stetigdifferenzierbar ist.*

Dies gilt dann auch für alle α, γ, $U(R|\alpha)$, $U(S|\gamma)$.

Satz 5. Substitution in Differentiale.

Voraussetzung. *Die Mannigfaltigkeiten* $\mathfrak{R}^q$, $\mathfrak{M}^k$ *seien orientiert. Durch* $\sigma(Q)$ *werde die offene Menge* $W \subseteq \mathfrak{R}^q$ *in* $\mathfrak{M}^k$ *abgebildet. Es sei* $M \subseteq W$. *Auf* $N \supseteq \sigma(M)$ *sei ein Differential* $\partial A^m(P, \alpha)$ *erklärt.*

Behauptung. *Wählt man die Bezeichnungen von Definition* 5, *so wird durch die Abbildung* $P = \sigma(Q)$ *ein Homomorphismus*

$$\sigma\,\partial A^m(P) - \partial A^m(\sigma(Q), \alpha) - \sum_{\mu|m}{}' a_{\mu_1 \dots \mu_m}(P, \alpha)\,\partial t_{\mu_1}(\mathfrak{w}) \dots \partial t_{\mu_m}(\mathfrak{w}) \tag{2.15}$$

gegeben, wobei $Q = \gamma(\mathfrak{w}) \in M \cdot U(S\gamma)$ *ist. Wenn* $\mathfrak{R}^q$, $\mathfrak{M}^k$ *und* σ *zweimal stetigdifferenzierbar sind, so stellt* (2.15) *ein Modulhomomorphismus bezüglich des Operators* ∂ *dar.*

Beweis. Sind γ, $U(S\gamma)$, α, $U(R|\alpha)$, $\mathfrak{t}(\mathfrak{w})$ wie in Definition 5 gewählt, so sei

$$a^*_{\nu_1 \dots \nu_m}(Q, \gamma) = \sum_{\mu|m}{}' a_{\mu_1 \dots \mu_m}(\sigma(Q), \alpha)\,\frac{\partial(t_{\mu_1}, \dots, t_{\mu_m})}{\partial(w_{\nu_1}, \dots, w_{\nu_m})}. \tag{2.16}$$

Ist $\tilde{\gamma}(\tilde{\mathfrak{w}})$, $U(\tilde{S}|\tilde{\gamma})$, $\tilde{\alpha}(\tilde{\mathfrak{t}})$, $U(\tilde{R}|\tilde{\alpha})$ eine zweite zulässige Wahl, und werden $\tilde{\mathfrak{t}}^*(\mathfrak{t}) = \tilde{\alpha}^{-1}\alpha(\mathfrak{t})$, sowie $\tilde{\mathfrak{t}}(\mathfrak{w}) = \tilde{\mathfrak{t}}^*(\alpha^{-1}\sigma\gamma(\mathfrak{w})) \equiv \tilde{\alpha}^{-1}\sigma\gamma(\mathfrak{w})$ abgekürzt, so gilt für jeden Punkt $Q = \gamma(\mathfrak{w})$ in $M_1 = U(S|\gamma) \cap U(\tilde{S}|\tilde{\gamma}) \cap M$ die Gleichung

$$\begin{aligned} a^*_{\nu_1 \dots \nu_m}(Q, \gamma) &= \sum_{\mu|m}{}' \sum_{\varrho|m}{}' a_{\varrho_1 \dots \varrho_m}(\sigma(Q), \tilde{\alpha})\,\frac{\partial(\tilde{t}^*_{\varrho_1}, \dots, \partial\tilde{t}^*_{\varrho_m})}{\partial(t_{\mu_1}, \dots, t_{\mu_m})}\,\frac{\partial(t_{\mu_1}, \dots, t_{\mu_m})}{\partial(w_{\nu_1}, \dots, w_{\nu_m})} \\ &\quad - \sum_{\varrho|m}{}' a_{\varrho_1 \dots \varrho_m}(\sigma(Q), \tilde{\alpha})\,\frac{\partial(\tilde{t}_{\varrho_1}, \dots, \tilde{t}_{\varrho_m})}{\partial(w_{\nu_1}, \dots, w_{\nu_m})}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Also ist $a^*_{\nu_1 \dots \nu_m}(Q, \gamma)$ unabhängig von der Wahl der Abbildung α und der Umgebung $U(R|\alpha)$ definiert. Mit $\tilde{\mathfrak{w}}(\mathfrak{w}) = \tilde{\gamma}^{-1}\gamma(\mathfrak{w})$ und $\hat{\mathfrak{t}}(\mathfrak{w}) = \tilde{\mathfrak{t}}(\gamma^{-1}\tilde{\gamma}(\mathfrak{w})) \equiv \tilde{\alpha}^{-1}\sigma\tilde{\gamma}(\tilde{\mathfrak{w}})$ wird

$$\begin{aligned} a^*_{\nu_1 \dots \nu_m}(Q, \gamma) &= \sum_{\lambda|m}{}' \sum_{\varrho|m}{}' a_{\varrho_1 \dots \varrho_m}(\sigma(Q), \tilde{\alpha})\,\frac{\partial(\hat{t}_{\varrho_1}, \dots, \hat{t}_{\varrho_m})}{\partial(\tilde{w}_{\lambda_1}, \dots, \tilde{w}_{\lambda_m})}\,\frac{\partial(\tilde{w}_{\lambda_1}, \dots, \tilde{w}_{\lambda_m})}{\partial(w_{\nu_1}, \dots, w_{\nu_m})} \\ &= \sum_{\lambda|m}{}' a^*_{\lambda_1 \dots \lambda_m}(Q, \tilde{\gamma})\,\frac{\partial(\tilde{w}_{\lambda_1}, \dots, \tilde{w}_{\lambda_m})}{\partial(w_{\nu_1}, \dots, w_{\nu_m})} \end{aligned} \tag{2.18}$$

für $Q \in M_1$. Daher ist $a^*_{\nu_1 \dots \nu_m}(Q, \gamma)$ eine Dichte m-ter Stufe auf $M \subseteq \mathfrak{R}^q$. Die Homomorphie folgt aus (2.12), w. z. b. w.

Eine orientierte Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{N}^q$ von $\mathfrak{M}^k$ mit $q \leqq k$ wird durch die identische Abbildung $\sigma(P) = P$ stetigdifferenzierbar in die orientierte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ abgebildet. Dadurch wird ein Differential ∂A^m auf $N \subseteqq \mathfrak{M}^k$ als Differential auf $N \cap \mathfrak{N}^q = M$ bezüglich der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}^q$ erklärt. Hat im Falle $m = q$ das Differential ∂A^q „längs" $\mathfrak{N}^q$ die Dichte ψ, so sei ∂A^q dann und nur dann über M integrierbar, wenn es ψ ist. Das Integral sei

$$\int_M \partial A^q = \int_M \psi. \tag{2.19}$$

Ist $q = k$ in Definition 5, so habe die Abbildung $\sigma(Q)$ eine positive Funktionaldeterminante, wenn $\frac{\partial t}{\partial w} > 0$ ist. Dann wird eine offene Umgebung $V(S)$ des Punktes S topologisch auf eine offene Umgebung $V(R)$ des Bildpunktes R abgebildet. Die Umkehrung von $\sigma(Q)$ auf $V(S)$ sei mit $\sigma_S^{-1}(P)$ bezeichnet. Dann gilt der

Satz 6. Abbildung.

Voraussetzung. *Die Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{N}^k$ und $\mathfrak{M}^k$ seien orientiert. Die offene Menge $H \subseteqq \mathfrak{N}^k$ werde durch $\sigma(Q)$ stetigdifferenzierbar auf $G \subseteqq \mathfrak{M}^k$ abgebildet. Die Abbildung $\sigma(Q)$ habe eine positive Funktionaldeterminante. Es sei*

$$\nu(P, Q) = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma(Q) \neq P \\ 1 & \text{für } \sigma(Q) = P. \end{cases} \tag{2.20}$$

Auf der meßbaren Menge $N \subseteqq \mathfrak{N}^k$ sei eine Funktion $\varphi(Q)$ und ein Differential $\partial A^k(Q)$ erklärt, deren Produkt $\varphi(Q)\,\partial A^k(Q)$ meßbar ist. Wenn $\sigma(S) = \sigma(T)$ ist, und $V(S)$ bzw. $V(T)$ die soeben beschriebenen Umgebungen sind, so sei

$$\sigma_S^{-1}\,\partial A^k = \sigma_T^{-1}\,\partial A^k \quad \text{auf} \quad \sigma\big(V(S) \cap N\big) \cap \sigma\big(V(T) \cap N\big).$$

Behauptung. *Durch $\partial B^k = \sigma_S^{-1}\,\partial A^k$ wird ein Differential auf $M = \sigma(N)$ eindeutig erklärt. Setzt man noch die Existenz eines der beiden Integrale in der folgenden Gl. (2.21) für $|\varphi|$ statt φ voraus, so existieren beide. Es gilt:*

$$\int_M \Big\{ \sum_{Q \in N} \nu(P, Q)\, \varphi(Q)\, \partial B^k(P) \Big\} = \int_N \varphi(Q)\, \partial A^k(Q). \tag{2.21}$$

Beweis. O. B. d. A. sei $H = \mathfrak{N}^k$ und $G = \mathfrak{M}^k$. Der Punkt $R \in \mathfrak{M}^k$, die Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_R(\mathfrak{M}^k)$, die Umgebung $U(R|\alpha)$ und der Punkt $P \in M \cap U(R|\alpha)$ werden beliebig gewählt. Die Punkte S und T mögen sich in $P = \sigma(S) = \sigma(T)$ abbilden. Wieder wählt man die Abbildungen $\gamma(\mathfrak{w}) \in \mathfrak{P}_S(\mathfrak{N}^k)$ und $\delta(\mathfrak{y}) \in \mathfrak{P}_T(\mathfrak{N}^k)$, sowie die Umgebungen $U(S|\gamma) \subseteqq V(S)$ mit $\sigma\big(U(S|\gamma)\big) \subseteqq U(R|\alpha)$ und $U(T|\delta) \subseteqq V(T)$ mit $\sigma\big(U(T|\delta)\big) \subseteqq U(R|\alpha)$ beliebig. Man setzt $\mathfrak{w}(\mathfrak{t}) = \gamma^{-1}\sigma_S^{-1}\alpha(\mathfrak{t})$ und $\mathfrak{y}(\mathfrak{t}) = \delta^{-1}\sigma_T^{-1}\alpha(\mathfrak{t})$. Für $P = \alpha(\mathfrak{t})$ gilt:

$$\psi\big(\sigma_S^{-1}(P), \gamma\big)\, \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \mathfrak{t}}\, \partial t_1 \ldots \partial t_k = \sigma_S^{-1}\,\partial A^k = \sigma_T^{-1}\,\partial A^k = \psi\big(\sigma_T^{-1}(P), \delta\big)\, \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \mathfrak{t}}\, \partial t_1 \ldots \partial t_k.$$

Daher ist $\psi^*(P, \alpha) = \psi\big(\sigma_S^{-1}(P), \gamma\big)\, \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \mathfrak{t}}$ unabhängig von der speziellen Wahl von S, γ und $U(S|\gamma)$ eindeutig auf $M \cap U(R|\alpha)$ erklärt. Wählt man einen

anderen Punkt $\overline{R} \in \mathfrak{M}^k$, eine andere Abbildung $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_{\overline{R}}(\mathfrak{M}^k)$ und eine Umgebung $U(\overline{R}|\beta)$, liegt im Durchschnitt $U(R|\alpha) \cap U(\overline{R}\,\beta) \cap M$ der Punkt $P = \alpha(\mathfrak{t}) = \beta(\mathfrak{x})$, und setzt man $\mathfrak{x}(\mathfrak{t}) = \beta^{-1}\alpha(\mathfrak{t})$, sowie $\mathfrak{w}^*(\mathfrak{x}) = \gamma^{-1}\sigma_S^{-1}\alpha\,\alpha^{-1}\beta(\mathfrak{x}) = \gamma^{-1}\sigma_S^{-1}\beta(\mathfrak{x})$, so erhält man:

$$\psi^*(P,\alpha) = \psi\left(\sigma_S^{-1}(P),\gamma\right)\frac{\partial \mathfrak{w}^*}{\partial \mathfrak{x}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{t}} = \psi^*(P,\beta)\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{t}}\,.$$

Daher ist ψ^* eine Dichte auf M. Sie definiert $\partial B^k = \psi^*(P,\alpha)\,\partial t_1 \ldots \partial t_k$, für das $\sigma\,\partial B^k = \partial A^k$ gilt. Die Mengen $\hat{N} = U(S|\gamma) \cap N$, $N' = \gamma^{-1}(\hat{N})$, $M' = \alpha^{-1}\sigma\gamma(N')$ und $\hat{M} = \alpha(M') = \sigma\left(U(S|\gamma) \cap N\right)$ sind alle meßbar. Da $\varphi \cdot \psi$ meßbar ist, ist es auch $\varphi \cdot \psi^*$. Es sei $|\varphi|\,\partial A^k$ über N, also $|\varphi|\psi$ über N, also auch über $\hat{N}$ integrierbar. Dann ist auch $|\varphi\,\psi|$, also $\varphi\,\psi$ über N bzw. $\hat{N}$ integrierbar. Man hat

$$(2.22)\qquad \int_{\hat{N}} \varphi\,\psi = \int_{N'} \varphi\,\psi(\mathfrak{w};\gamma)\,d w_1 \ldots d w_k = \int_{M'} \varphi\,\psi\left(\mathfrak{w}(\mathfrak{t});\gamma\right)\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \mathfrak{t}}\,dt_1 \ldots dt_k = \int_{\hat{M}} \varphi\,\psi^*.$$

Wegen

$$(2.23)\qquad \sum_{Q \in \hat{N}} \nu(P,Q)\,\varphi(Q) = \begin{cases} \varphi\left(\sigma_S^{-1}(P)\right) & \text{für} \quad P \in M \\ 0 & \text{für} \quad P \notin M \end{cases}$$

gilt

$$(2.24)\qquad \int_{\hat{N}} \varphi\,\psi = \int_M \left\{ \sum_{Q \in \hat{N}} \nu(P,Q)\,\varphi(Q)\,\psi^*(P) \right\}.$$

Wenn dagegen in (2.21) das linke Integral mit $|\varphi|$ statt φ existiert, so ist auch $\sum_{Q \in N} \nu(P,Q)\,\varphi(Q)\,\psi^*$ über M integrierbar. Wegen $|\varphi\left(\sigma_S^{-1}(P)\right)\psi^*(P)| \leqq \sum_{Q \in N} \nu(P,Q)\,|\varphi(Q)|\,|\psi^*|$ auf $\hat{M}$ ist auch die meßbare Dichte $\varphi\,\psi^*$ über $\hat{M}$ integrierbar. Also kann man (2.22) in umgekehrter Reihenfolge berechnen, woraus mit (2.23) wieder (2.24) folgt.

Zu einer beliebigen kompakten Menge $K \subseteqq \mathfrak{M}^q$ wählt man eine DIEUDONNÉ-Zerlegung λ_μ, $U(S_\mu|\gamma_\mu)$. Da $\lambda_\mu(Q)$ außerhalb von $U(S_\mu|\gamma_\mu)$ verschwindet, so folgt aus (2.24) mit Satz 3,3

$$(2.25)\qquad \begin{aligned} \int_M \left\{ \sum_{Q \in N \cap K} \nu(P,Q)\,\varphi(Q)\,\psi^*(P) \right\} &= \sum_{\mu=1}^{n} \int_M \left\{ \sum_{Q \in N \cap K} \nu(P,Q)\,\lambda_\mu(Q)\,\varphi\,\psi^* \right\} \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} \int_N \lambda_\mu \varphi\,\psi = \int_N \varphi\,\psi. \end{aligned}$$

Nun wählt man eine Folge kompakter Mengen $K_\nu \subseteqq K_{\nu+1}$ mit $K_0 = \emptyset$, die $N \subseteqq \bigcup_{\nu=0}^{\infty} K_\nu$ überdecken. Wendet man (2.25) auf $|\varphi|\,|\psi|$ an, so ist

$$(2.26)\qquad \begin{aligned} \int_M \left\{ \sum_{Q \in N} \nu(P,Q)\,|\varphi(Q)|\,|\psi^*| \right\} &= \lim_{\nu \to \infty} \int_M \left\{ \sum_{Q \in N \cap K_\nu} \nu(P,Q)\,|\varphi|\,|\psi^*| \right\} \\ &= \lim_{\nu \to \infty} \int_{N \cap K_\nu} |\varphi\,\psi| = \int_N |\varphi\,\psi|, \end{aligned}$$

denn es existiert in (2.26) wenigstens das erste oder letzte Integral. Gemäß Satz 4,1 gilt (2.26) nachträglich auch ohne Betragszeichen, w. z. b. w.

Um den Satz von FUBINI auf Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}^k$ übertragen zu können, wird $\mathfrak{M}^k$ durch eine Abbildung $\sigma(P)$ von $\mathfrak{M}^k$ in $\mathfrak{N}^l$ in „*Schichten* $\sigma(P) = const$" zerlegt. Der Satz hat die formale Gestalt

$$\int_{\mathfrak{M}^k} = \int_{Q \in \mathfrak{N}^l} \int_{\sigma(P)=Q} .$$

Von der Abbildung $\sigma(P)$, die die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ in Schichten zerlegt, werde verlangt:

Die orientierte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ *werde durch* $\sigma(P)$ *stetig in die orientierte Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{N}^l$ *abgebildet, so daß gilt:*

1. *Das Urbild* $\mathfrak{M}_Q = \sigma^{-1}(Q)$ *eines jeden Punktes* $Q \in \mathfrak{N}^l$ *ist entweder leer oder eine s-dimensionale, orientierte Teilmannigfaltigkeit von* $\mathfrak{M}^k$ *mit* $s = k - l > 0$.

2. *Zu jedem Punkt* $P_0 \in \mathfrak{M}^k$ *gibt es eine Umgebung* $U(P_0) \subseteqq \mathfrak{M}^k$, *eine offene Nullpunktsumgebung* $\mathfrak{V}'(P_0)$ *eines* $\mathfrak{v} = (v_1, \ldots, v_s)$*-Raumes und zum Bildpunkt* $Q_0 = \sigma(P_0) \in \mathfrak{N}^l$ *eine offene Umgebung* $\mathfrak{Q}(Q_0) \subseteqq \mathfrak{N}^l$, *so daß das Produkt* $\mathfrak{Q}(Q_0) \times \mathfrak{V}'(P_0)$ *durch eine Abbildung* $\tau(Q, \mathfrak{v}) = \tau_{P_0}(Q, \mathfrak{v})$ *topologisch auf* $U(P_0)$ *abgebildet wird.*

3. *Es gibt eine* $\mathfrak{Q}(Q_0)$ *uniformisierende Abbildung* $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_{Q_0}(\mathfrak{N}^l)$, *so daß* $\tau(\alpha(\mathfrak{t}), \mathfrak{v}) = \zeta(\mathfrak{t}, \mathfrak{v})$ *zu* $\mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{M}^k)$ *gehört und* $U(P_0)$ *uniformisiert.*

4. *Ist der Punkt* Q_1 *in* $\mathfrak{Q}(Q_0)$ *beliebig gewählt, so uniformisiert* $\tau(Q_1, \mathfrak{v}) = \varrho(\mathfrak{v})$ *bei festem* Q_1 *die Umgebung* $\mathfrak{V}_{Q_1}(P_0) = \mathfrak{M}_{Q_1} \cap U(P_0)$ *von* $P_1 = \tau(Q_1, 0)$.

1. Beispiel. Der Produktraum $\mathfrak{M}^k = \mathfrak{N}^l \times \mathfrak{R}^s$ der Punkte $P = (Q, R)$ wird durch die Projektion $\sigma(P) = Q$ in Schichten $\mathfrak{M}_Q = [P = (Q, R)]_P$ zerlegt.

2. Beispiel. Eine einmal stetigdifferenzierbare Abbildung $\sigma(P)$, die in der Bezeichnungsweise von Definition 5 eine Funktionalmatrix $\left(\frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial \mathfrak{w}}\right)$ vom Rang l hat, zerlegt $\mathfrak{M}^k$ in Schichten, wie gleich bewiesen werden wird. Um die Orientierung von $\mathfrak{M}_Q$ festzulegen, wählt man die Abbildungen $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{M}_Q)$, $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_Q(\mathfrak{N}^l)$ und $\gamma(\mathfrak{w}) \in \mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{M}^k)$ beliebig und setzt $\mathfrak{t} = (t_1, \ldots, t_l) = \alpha^{-1}\sigma\gamma(\mathfrak{w})$ bzw. $\mathfrak{w}(\mathfrak{x}) = \gamma^{-1}\beta(\mathfrak{x})$. Dann ist die Schicht $\mathfrak{M}_Q$ so zu orientieren, daß die Determinante

$$(\operatorname{grad} t_1, \ldots, \operatorname{grad} t_l, \mathfrak{w}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{w}_{x_s}) > 0 \tag{2.27}$$

ist. Die Gradienten sind bei $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}(\mathfrak{x})$ zu bilden.

Beweis. Wählt man die Abbildungen α und γ wie in Definition 5, so hat die Matrix $\left(\frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial \mathfrak{w}}\right)$ den Rang l. Man kann $\mathfrak{t} = \alpha^{-1}\sigma\gamma(\mathfrak{w})$ nach l geeigneten der Koordinaten $w_1, \ldots, w_k$ auflösen. Man erhält die Abbildung $\mathfrak{w}(\mathfrak{t}, \mathfrak{v})$, die bei hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ die Nullpunktsumgebung $\mathfrak{Q}'(Q_0) \times \mathfrak{V}'(P_0) = [|t_\nu| < \varepsilon]_{\mathfrak{t}} \times [|v_\nu| < \varepsilon]_{\mathfrak{v}}$ topologisch und beiderseits stetigdifferenzierbar auf eine Nullpunktsumgebung $U'(P_0)$ des $\mathfrak{w}$-Raumes abbildet. Wählt man die $\mathfrak{v}$-Koordinaten geeignet, so ist $\frac{\partial \mathfrak{w}(\mathfrak{t}, \mathfrak{v})}{\partial(\mathfrak{t}, \mathfrak{v})} > 0$. Daher wird bei hinreichend kleinem

$\varepsilon > 0$ durch die Abbildung $\gamma(\mathfrak{w}(\mathfrak{t}, \mathfrak{v}))$ eine Umgebung $U(P_0) = \gamma(U'(P_0))$ uniformisiert. Mit $\mathfrak{Q}(Q_0) = \alpha(\mathfrak{Q}'(Q_0))$ und $\tau_{P_0}(Q, \mathfrak{v}) = \tau(Q, \mathfrak{v}) = \gamma(\mathfrak{w}(\alpha^{-1}(Q), \mathfrak{v}))$ werden 2. und 3. erfüllt. Bei festem $Q_1 \in \mathfrak{Q}(Q_0)$ bildet $\tau(Q_1, \mathfrak{v})$ die Nullpunktsumgebung $\mathfrak{V}'(P_0)$ topologisch auf $\mathfrak{V}_{Q_1}(P_0) = \mathfrak{M}_{Q_1} \cap U(P_0)$ ab und werde als solches mit $\varrho(\mathfrak{v}) = \varrho_{P_0}(\mathfrak{v})$ bezeichnet. Die Willkür, die noch in der Konstruktion der $U(P_0)$, $\mathfrak{Q}(Q_0)$, $\mathfrak{V}'(P_0)$, $\mathfrak{V}_Q(P_0)$, $\tau(Q, \mathfrak{v})$, $\alpha(\mathfrak{t})$ lag, werde beseitigt, indem man für jedes P_0 eine beliebige, zulässige Konstruktion fest wählt.

Um 1. auch zu erfüllen, müssen noch die Abbildungsmengen $\mathfrak{P}_{P_1}(\mathfrak{M}_{Q_1})$ zu jedem Punkt $Q_1 \in \mathfrak{N}^l$ mit $\mathfrak{M}_{Q_1} \neq \emptyset$ und jedem Punkt $P_1 \in \mathfrak{M}_{Q_1}$ definiert werden. Q_1 und P_1 seien fest, P_0 variabel. Dann sei $\mathfrak{P}_{P_1}(\mathfrak{M}_{Q_1})$ die Menge aller Abbildungen $\varrho_{P_0}(\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1) = \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1)$ für die der Punkt P_1 zu $U(P_0) \cap \mathfrak{M}_{Q_1} = \mathfrak{V}_{Q_1}(P_0)$ gehört und $P_1 = \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v}_1)$ mit $\mathfrak{v}_1 \in \mathfrak{V}'(P_0)$ gilt. Die Forderungen von Definition 1 sind erfüllt. Es gilt nämlich:

1a) $\varrho_{P_0}(\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1) = \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1)$ bildet die um $\mathfrak{v}_1$ verschobene Umgebung $\mathfrak{V}'(P_0) - \mathfrak{v}_1$ auf $\mathfrak{V}_{Q_1}(P_0)$ topologisch ab, wobei $\varrho_{P_0}(0 + \mathfrak{v}_1) = P_1$ ist.

1b) Hat $\mathfrak{v}_2 \in \mathfrak{V}'(P_0) - \mathfrak{v}_1$ den Bildpunkt $P_2 = \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v}_2)$, so gehört wegen $\mathfrak{v}_3 = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 \in \mathfrak{V}'(P_0)$ auch die Abbildung $\tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_1) = \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_3)$ zu $\mathfrak{P}_{P_1}(\mathfrak{M}_{Q_1})$.

2. Sind $\tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1)$ und $\tau_{\bar{P}_0}(Q_1, \bar{\mathfrak{v}} + \bar{\mathfrak{v}}_1)$ zwei Abbildungen aus $\mathfrak{P}_{P_1}(\mathfrak{M}_{Q_1})$, so gibt es nach Konstruktion Abbildungen $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_{Q_0}(\mathfrak{N}^l)$ und $\bar{\alpha}(\bar{\mathfrak{t}}) \in \mathfrak{P}_{\bar{Q}_0}(\mathfrak{N}^l)$ mit $P_1 = \alpha(\mathfrak{t}_1) = \bar{\alpha}(\bar{\mathfrak{t}}_1)$ und mit $Q_0 = \sigma(P_0)$, $\bar{Q}_0 = \sigma(\bar{P}_0)$, so daß die Abbildungen $\tau_{P_0}(\alpha(\mathfrak{t} + \mathfrak{t}_1), \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1)$ und $\tau_{\bar{P}_0}(\bar{\alpha}(\bar{\mathfrak{t}} + \bar{\mathfrak{t}}_1), \bar{\mathfrak{v}} + \bar{\mathfrak{v}}_1)$ zu $\mathfrak{P}_{P_1}(\mathfrak{M}^k)$ gehören. Zwischen ihnen vermittelt die Transformation

$$\bar{\mathfrak{t}} = \bar{\mathfrak{t}}(\mathfrak{t}), \quad \text{definiert durch} \quad \bar{\alpha}(\bar{\mathfrak{t}} + \bar{\mathfrak{t}}_1) = \alpha(\mathfrak{t} + \mathfrak{t}_1) = Q$$
$$\bar{\mathfrak{v}} = \bar{\mathfrak{v}}_Q(\mathfrak{v}), \quad \text{definiert durch} \quad (Q, \bar{\mathfrak{v}} + \bar{\mathfrak{v}}_1) = \tau_{\bar{P}_0}^{-1} \tau_{P_0}(Q, \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1).$$

Sie ist stetigdifferenzierbar und hat eine positive Funktionaldeterminante $\frac{\partial(\bar{\mathfrak{t}}, \bar{\mathfrak{v}})}{\partial(\mathfrak{t}, \mathfrak{v})} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{t}}}{\partial \mathfrak{t}} \frac{\partial \bar{\mathfrak{v}}_Q}{\partial \mathfrak{v}} > 0$. Wegen $\frac{\partial \bar{\mathfrak{t}}}{\partial \mathfrak{t}} > 0$ ist auch $\frac{\partial \bar{\mathfrak{v}}_Q}{\partial \mathfrak{v}} > 0$. Dasselbe gilt insbesondere für $\mathfrak{t} = \bar{\mathfrak{t}} = 0$. Dann vermittelt aber $\bar{\mathfrak{v}}_{Q_1}(\mathfrak{v}) = \varrho_{\bar{P}_0}^{-1} \varrho_{P_0}(\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1) - \bar{\mathfrak{v}}_1$ mit $\frac{\partial \bar{\mathfrak{v}}_{Q_1}}{\partial \mathfrak{v}} > 0$ gerade zwischen den Abbildungen $\varrho_{\bar{P}_0}$ und ϱ_{P_0}. Somit sind alle Forderungen von Definition 1 erfüllt. $\mathfrak{M}_Q$ ist eine s-dimensionale, orientierte Mannigfaltigkeit, für die 4. gilt. Somit sind die Bedingungen 1.—4. nachgewiesen, die an die Schichtzerlegung $\sigma(P)$ gestellt werden.

Die Forderung (2.27) legt eine und nur eine Orientierung fest. Sie ist genau dann erfüllt, wenn sie bereits für ein Tripel α, β, γ erfüllt ist. Wählt man speziell $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_{Q_0}(\mathfrak{N}^l)$, $\gamma(\mathfrak{w}) = \tau(\alpha(\mathfrak{t}), \mathfrak{v})$, $\beta(\mathfrak{x}) = \tau(Q_0, \mathfrak{v})$ d.h. $\mathfrak{w} \equiv (\mathfrak{t}, \mathfrak{v})$, $\mathfrak{t} \equiv \mathfrak{t}$, $\mathfrak{x} \equiv \mathfrak{v}$ so wird $(\operatorname{grad} t_1, \ldots, \operatorname{grad} t_l, \mathfrak{w}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{w}_{x_s}) = 1 > 0$, w. z. b. w.

Behält man die Bezeichnungen der Bedingungen 1.—4. bei, so kann man den folgenden Satz formulieren:

Satz 7. Schichtweise Integration (Fubini).

Voraussetzung. *Von den orientierten, kompakt überdeckbaren Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}^k$ und $\mathfrak{N}^l$ werde $\mathfrak{M}^k$ durch $\sigma(P)$ in $\mathfrak{N}^l$ stetig abgebildet und gemäß*

den Bedingungen 1.—4. *in s-dimensionale Schichten* $\mathfrak{M}_Q = [\sigma(P) = Q]_P$ *zerlegt. Es sei* $s = k - l > 0$. *Die Dichte* ψ *sei über die meßbare Menge* M *integrierbar.*

Behauptung.

1. *Zu jedem festen Punkt* $Q_0 \in \mathfrak{N}^l$ *als Parameter und jeder festen Abbildung* $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_{Q_0}(\mathfrak{N}^l)$ *als Parameter wird auf* $\mathfrak{M}_Q \cap M$ *eine Dichte*

$$\psi^*(P_0, \beta | Q_0, \alpha) = \psi(P_0, \zeta) \frac{\partial \varrho^{-1} \beta(\mathfrak{x})}{\partial \mathfrak{x}} \tag{2.28}$$

als Funktion des Punktes $P_0 \in M \cap \mathfrak{M}_{Q_0}$ *und der Abbildung* $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{M}_{Q_0})$ *definiert. In* (2.28) *ist* $\varrho(\mathfrak{v}) = \tau_{P_0}(Q_0, \mathfrak{v})$ *und* $\zeta = \zeta(\mathfrak{t}, \mathfrak{v}) = \tau_{P_0}(\alpha(\mathfrak{t}), \mathfrak{v})$ *abgekürzt. Für* $Q_1 = \alpha(\mathfrak{t}_1) \subseteq \mathfrak{Q}(Q_0)$ *und* $P_1 = \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v}_1)$ *gilt*

$$\psi^*\big(P_1, \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1) \,|\, Q_1, \alpha(\mathfrak{t} + \mathfrak{t}_1)\big) = \psi(P_1, \zeta). \tag{2.29}$$

2. *Es gibt eine Nullmenge* $N \subset \mathfrak{N}^l$, *so daß für jeden Punkt* $Q_0 \in \mathfrak{N}^l - N$ *und jede Abbildung* $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_{Q_0}(\mathfrak{N}^l)$ *die Dichte* $\psi^*(P | Q_0, \alpha)$ *über* $M \cap \mathfrak{M}_{Q_0}$ *integrierbar ist.*

3. *Das Integral* $\int\limits_{\mathfrak{M}_Q \cap M} \psi^*(P | Q, \alpha)$ *stellt eine über* $\mathfrak{N}^l - N$ *integrierbare Dichte dar, für die die Gleichung*

$$\int\limits_M \psi(P) = \int\limits_{Q \in \mathfrak{N}^l - N} \; \int\limits_{P \in \mathfrak{M}_Q \cap M} \psi^*(P)$$

besteht. Statt $\mathfrak{N}^l - N$ *werde auch kurz* $\mathfrak{N}^l$ *geschrieben.*

Beweis. Ist $\overline{\beta}(\overline{\mathfrak{x}})$ eine zweite Abbildung aus $\mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{M}_{Q_0})$, so gilt nach (2.28)

$$\begin{aligned}
\psi^*(P_0, \beta | Q_0, \alpha) &= \psi(P_0, \zeta) \frac{\partial \varrho^{-1} \overline{\beta} \overline{\beta}^{-1} \beta(\mathfrak{x})}{\partial \mathfrak{x}}\Big|_{\mathfrak{x}=0} \\
&= \psi(P_0, \zeta) \frac{\partial \varrho^{-1} \overline{\beta}(\overline{\mathfrak{x}})}{\partial \overline{\mathfrak{x}}}\Big|_{\overline{\mathfrak{x}}=0} \frac{\partial \overline{\beta}^{-1} \beta(\mathfrak{x})}{\partial \mathfrak{x}}\Big|_{\mathfrak{x}=0} \\
&= \psi^*(P_0, \overline{\beta} | Q_0, \alpha) \frac{\partial \overline{\mathfrak{x}}}{\partial \mathfrak{x}}\Big|_{\mathfrak{x}=0}.
\end{aligned}$$

Nach Definition 2 ist ψ^* eine Dichte auf $M \cap \mathfrak{M}_{Q_0}$. Ihr Definitionsbereich bezüglich β kann so erweitert werden, daß auch (1.2) und (1.3) gelten. Die Gl. (2.29) folgt aus:

$$\begin{aligned}
&\psi^*\big(P_1, \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1) \,|\, Q_1, \alpha(\mathfrak{t} + \mathfrak{t}_1)\big) \\
&\quad = \psi^*\big(P_1, \tau_{P_1}(Q_1, \mathfrak{v}) \,|\, Q_1, \alpha(\mathfrak{t} + \mathfrak{t}_1)\big) \frac{\partial \varrho \overline{P_1}^{-1} \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v})}{\partial \mathfrak{v}}\Big|_{\mathfrak{v}=\mathfrak{v}_1} \\
&\quad = \psi\big(P_1, \tau_{P_1}(\alpha(\mathfrak{t} + \mathfrak{t}_1), \mathfrak{v})\big) \frac{\partial \tau \overline{P_1}^{-1} \tau_{P_0}(\alpha(\mathfrak{t}), \mathfrak{v})}{\partial(\mathfrak{t}, \mathfrak{v})}\Big|_{\mathfrak{t}=\mathfrak{t}_1, \mathfrak{v}=\mathfrak{v}_1} \\
&\quad = \psi\big(P_1, \tau_{P_0}(\alpha(\mathfrak{t}), \mathfrak{v})\big).
\end{aligned}$$

Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

Wird die Abbildung $\tilde{\alpha}(\tilde{t})$ in $\mathfrak{P}_{Q_1}(\mathfrak{N}^l)$ beliebig gewählt, so gehört mit $\tau_{P_0}(\alpha(t), \mathfrak{v})$ auch die Abbildung $\tau_{P_0}(\tilde{\alpha}(\tilde{t}), \mathfrak{v})$ zu $\mathfrak{P}_{P_1}(\mathfrak{N}^l)$. Also wird

$$\psi\left(P_1, \tau_{P_0}(\alpha(t), \mathfrak{v})\right) = \psi\left(P_1, \tau_{P_0}(\tilde{\alpha}(\tilde{t}), \mathfrak{v})\right) \frac{\partial \tilde{\alpha}^{-1}\alpha(t)}{\partial t}\Big|_{t=t_1} \tag{2.30}$$

oder

$$\psi^*\left(P_1, \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1)\,|\,Q_1, \alpha(t+t_1)\right) = \psi\left(P_1, \tau_{P_0}(\tilde{\alpha}(\tilde{t}), \mathfrak{v})\right) \frac{\partial \tilde{\alpha}^{-1}\alpha(t)}{\partial t}\Big|_{t=t_1} \tag{2.31}$$

Es sei $M' = \zeta^{-1}\left(U(P_0) \cap M\right)$ und $\alpha^{-1}\left(\mathfrak{Q}(Q_0)\right) = \mathfrak{Q}'(Q_0)$. Bei festem $t_1 \in \mathfrak{Q}'(Q_0)$ weder der Querschnitt $[(t_1, \mathfrak{v}) \in M']_{\mathfrak{v}} = M_{t_1}$ gesetzt. Nach Fubini gilt:

$$\int\limits_{M \cap U(P_0)} \psi = \int\limits_{M'} \psi = \int\limits_{\mathfrak{Q}'(Q_0)} \left\{ \int\limits_{M_t} \psi\left(\zeta(t, \mathfrak{v}), \zeta\right) dv_1 \dots dv_s \right\} dt_1 \dots dt_l \tag{2.32}$$

wobei das innere Integral

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_{M_{t_1}} \psi\left(\zeta(t_1, \mathfrak{v}), \zeta\right) dv_1 \dots dv_s \\ \displaystyle= \int\limits_{M_{t_1}} \psi^*\left(\tau(Q_1, \mathfrak{v}), \tau(Q_1, \mathfrak{v})\,|\,Q_1, \alpha(t+t_1)\right) dv_1 \dots dv_s \\ \displaystyle= \int\limits_{M_{t_1}} \psi^*\left(\tau(Q_1, \mathfrak{v}), \tau(Q_1, \mathfrak{v})\,|\,Q_1, \tilde{\alpha}(\tilde{t})\right) dv_1 \dots dv_s \, \frac{\partial \tilde{\alpha}^{-1}\alpha(t)}{\partial t}\Big|_{t=t_1} \end{cases} \tag{2.33}$$

für alle $t_1 \in \mathfrak{Q}'(Q_0) - N'(P_0)$ existiert. $N'(P_0)$ ist eine Nullmenge, deren Bild $N(P_0) = \alpha(N'(P_0))$ ist. In $U(P_0)$ werden offene, beschränkte Umgebungen $U_2(P_0)$, $U_3(P_0)$ von P_0 mit $\bar{U}_3(P_0) < U_2(P_0)$, $\bar{U}_2(P_0) < U(P_0)$ gewählt. Sind der Punkt $Q_1 \in \mathfrak{Q}(Q_0) - N(P_0)$ und die Abbildung $\tilde{\alpha}(\tilde{t}) \in \mathfrak{P}_{Q_1}(\mathfrak{N}^l)$ beliebig gewählt, so gibt es zu jedem Punkt $P_1 \in \mathfrak{M}_{Q_1} \cap \bar{U}_2(P_0)$ eine Umgebung $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{V}_{Q_1}(P_0)$ von P_1, bzw. zu jedem Punkt $P_1 \in \mathfrak{M}_{Q_1} - \bar{U}_2(P_0)$ eine Umgebung $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{M}_{Q_1} - \bar{U}_2(P_0)$. Da im ersten Fall (2.33) gilt, im zweiten Fall $M \cap \mathfrak{W} \cap \bar{U}_2(P_0)$ leer ist, ist $\psi^*\left(\tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v}), \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v})\,|\,Q_1, \tilde{\alpha}\right)$ über $M \cap \mathfrak{W} \cap \bar{U}_2(P_0)$ integrierbar. Daher ist $\psi^*(P, \beta\,|\,Q_1, \tilde{\alpha})$ über $M \cap \mathfrak{M}_{Q_1} \cap \bar{U}_2(P_0)$ örtlich, also auch „global" integrierbar. Ist aber $Q_1 \notin \mathfrak{Q}(Q_0)$, so ist $\bar{U}_2(P_0) \cap \mathfrak{M}_{Q_1}$ leer; denn für jeden Punkt $P_1 \in \bar{U}_2(P_0) \cap \mathfrak{M}_{Q_1}$ gilt $P_1 = \tau(Q_1, \mathfrak{v}_1)$ mit $Q_1 = \sigma(P_1) \in \mathfrak{Q}(Q_0)$. Wenn also $Q \in \mathfrak{N}^l - N(P_0)$ und $\tilde{\alpha}(\tilde{t}) \in \mathfrak{P}_Q(\mathfrak{N}^l)$ beliebig gewählt sind, und $M_Q = M \cap \mathfrak{M}_Q$ gesetzt wird, so existiert das Integral

$$\chi(Q, \tilde{\alpha}) = \int\limits_{M_Q \cap \bar{U}_2(P_0)} \psi^*(P\,|\,Q, \tilde{\alpha}).$$

Damit ist die zweite Behauptung bewiesen.

Wenn $\bar{\alpha}(\bar{t})$ eine zweite Abbildung aus $\mathfrak{P}_Q(\mathfrak{N}^l)$ ist, so folgt aus (2.33)

$$\chi(Q, \bar{\alpha}) = \chi(Q, \tilde{\alpha}) \frac{\partial \bar{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}(\tilde{t})}{\partial \tilde{t}}\Big|_{\tilde{t}=0}.$$

Daher ist $\chi(Q, \tilde{\alpha})$ eine Dichte auf $\mathfrak{R}^l - N(P_0)$. Schreibt man (2.32) für $\overline{U}_2(P_0)$ statt $U(P_0)$ an, so wird

$$\int\limits_{M \cap \overline{U}_2(P_0)} \psi(P) = \int\limits_{Q \in \mathfrak{R}^l - N(P_0)} \left\{ \int\limits_{M_Q \cap \overline{U}_2(P_0)} \psi^* \right\}. \tag{2.34}$$

Abzählbar viele $U_1(P_\nu)$ überdecken die Menge M. Es ist $N^* = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} N(P_\nu)$ wieder eine Nullmenge. Die kompakten Mengen $K_\varrho = \bigcup_{\nu=1}^{\varrho} \overline{U}_3(P_\nu)$ wachsen monoton: $K_\varrho \subseteqq K_{\varrho+1}$. Nach Satz 3 ist ψ^* für jedes $Q \in \mathfrak{R}^l - N$ über $M_Q \cap K_\varrho$ integrierbar. Bezüglich der Überdeckung $U_2(P_\nu)$ von K_ϱ werde eine DIEUDONNÉ-Zerlegung $\lambda_1, \ldots, \lambda_\varrho$ gewählt. Die Gl. (2.34) gilt mit demselben $N(P_0)$ auch für $\lambda_\nu \psi^*$ bzw. $\lambda_\nu \psi$ und $M_Q \cap K_\varrho$ statt ψ^* bzw. ψ und M_Q. Es ist

$$\sum_{\nu=1}^{\varrho} \int\limits_{M_Q \cap \overline{U}_2(P_\nu) \cap K_\varrho} \lambda_\nu \psi^* = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \int\limits_{M_Q \cap K_\varrho} \lambda_\nu \psi^* = \int\limits_{M_Q \cap K_\varrho} \psi^*$$

als Summe endlich vieler Dichten wieder eine Dichte auf $\mathfrak{R}^l - N^*$. Daher gilt

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_{M \cap K_\varrho} \psi = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \int\limits_{M \cap \overline{U}_2(P_\nu) \cap K_\varrho} \lambda_\nu \psi = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \int\limits_{\mathfrak{R}^l - N^*} \left\{ \int\limits_{M_Q \cap \overline{U}_2(P_\nu) \cap K_\varrho} \lambda_\nu \psi^* \right\} \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int\limits_{\mathfrak{R}^l - N^*} \left\{ \int\limits_{M_Q \cap K_\varrho} \psi^* \right\}. \end{cases} \tag{2.35}$$

Wendet man (2.35) auf $|\psi|$ statt ψ an, so gilt nach Satz 4

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_M |\psi| = \lim_{\varrho \to \infty} \int\limits_{M \cap K_\varrho} |\psi| = \lim_{\varrho \to \infty} \int\limits_{\mathfrak{R}^l - N^*} \left\{ \int\limits_{M_Q \cap K_\varrho} |\psi|^* \right\} \\ \qquad = \displaystyle\int\limits_{\mathfrak{R}^l - N} \lim_{\varrho \to \infty} \int\limits_{M_Q \cap K_\varrho} |\psi^*| = \int\limits_{\mathfrak{R}^l - N} \int\limits_{M_Q} |\psi^*|. \end{cases} \tag{2.36}$$

Dabei ist $\lim\limits_{\varrho \to \infty} \int\limits_{M_Q \cap K_\varrho} \psi^*$ für alle $Q \in \mathfrak{R}^l - N$ vorhanden und als Grenzwert einer Dichte wieder eine Dichte. Die Nullmenge N umfaßt N^*. Die Dichte $\psi^*(P|Q, \alpha)$ ist über M_Q für jedes feste $Q \in \mathfrak{R}^l - N$ und $\alpha \in \mathfrak{P}_Q(\mathfrak{R}^l)$ integrierbar. Wegen $\left| \int\limits_{M_Q \cap K} \psi^* \right| \leq \int\limits_{M_Q} |\psi^*|$ gilt (2.36) mit demselben N für ψ und ψ^*, w. z. b. w.

Zusatz 1. *Die meßbare Dichte ψ ist sicher über die meßbare Menge M integrierbar, wenn $|\psi^*|$ über fast alle M_Q integrierbar ist und $\int\limits_{\mathfrak{R}^l} \int\limits_{M_Q} |\psi^*|$ existiert. Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem entsprechenden Fall des gewöhnlichen Satzes von* FUBINI.

Zusatz 2. *Ist ψ die Dichte eines über M integrierbaren Differentials $\partial \varphi^s(P)\, \partial \xi^l(\sigma(P))$, so gilt*

$$\int\limits_M \partial \varphi^s(P)\, \partial \xi^l(\sigma(P)) = (-1)^{l s} \int\limits_{Q \in \mathfrak{R}^l - N} \left\{ \int\limits_{P \in M_Q} \partial \varphi^s(P) \right\} \partial \xi^l(Q), \tag{2.37}$$

wobei $N = N_1 \cup N_2$ *ist.* N_1 *ist eine Nullmenge und* $N_2 = [\partial \xi^l(Q) = 0]_Q$. *Das innere Integral existiert sicher für jedes* $Q \in \mathfrak{R}^l - N$.

Beweis. Wählt man die Abbildungen $\gamma(\mathfrak{w}) \in \mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{M}^k)$ und $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_{Q_0}(\mathfrak{R}^l)$ mit $Q_0 = \sigma(P_0)$ beliebig, so gilt auf M

$$\partial \varphi^s(P) = \sum_{\mu}^{k\,\prime} \varphi_{\mu_1, \ldots, \mu_s}(P, \gamma)\, \partial w_{\mu_1} \ldots \partial w_{\mu_s},$$

$$\partial \xi^l(Q) = \xi(Q, \alpha)\, \partial t_1 \ldots \partial t_l,$$

$$\partial \xi^l(\sigma(P)) = \xi(\sigma(P), \alpha) \sum_{\nu}^{k\,\prime} \frac{\partial \alpha^{-1} \sigma \gamma(\mathfrak{w})}{\partial (w_{\nu_1}, \ldots, w_{\nu_l})}\, \partial w_{\nu_1} \ldots \partial w_{\nu_l},$$

$$\psi(P, \gamma) = \sum_{\nu}^{k\,\prime} \pm \varphi_{\mu_1, \ldots, \mu_s}(P, \gamma)\, \xi(\sigma(P), \alpha)\, \frac{\partial \alpha^{-1} \sigma \gamma(\mathfrak{w})}{\partial (w_{\nu_1}, \ldots, w_{\nu_l})},$$

wobei $\mu_1, \ldots, \mu_s, \nu_1, \ldots, \nu_l$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, k$ mit $\nu_1 < \ldots < \nu_l$, $\mu_1 < \ldots < \mu_s$ ist. Speziell kann man $\gamma(\mathfrak{w}) = \tau(\alpha(\mathfrak{t}), \mathfrak{v})$ mit $\mathfrak{w} = (\mathfrak{t}, \mathfrak{v})$ wählen. Dann wird

$$\psi^*(P, \tau(Q, \mathfrak{v}) | Q, \alpha) = (-1)^{ls} \varphi_{l+1, \ldots, k}(P, \gamma)\, \xi(Q, \alpha).$$

Dabei ist $\varphi_{l-1, \ldots, k}(P, \gamma)$ die Dichte von $\partial \varphi^s$ längs $\mathfrak{M}_Q$. Man hat

$$\int_M \psi = \int_{\mathfrak{R}^l} \left\{ \int_{M_Q} (-1)^{ls} \varphi_{l-1, \ldots, k}\, \xi(Q, \alpha) \right\} = (-1)^{ls} \int_{\mathfrak{R}^l - N} \left\{ \int_{M_Q} \partial \varphi^s(P) \right\} \xi(Q, \alpha),$$

wobei das Integral $\int_{M_Q} \partial \varphi^s$ für alle Q mit $\xi(Q, \alpha) \neq 0$ bis auf eine Nullmenge existiert, w. z. b. w.

Auf Mannigfaltigkeiten wird der Gaussschе *Integralsatz*, der dann auch Stokesscher *Integralsatz* genannt werden kann, benötigt werden. Zunächst sind noch einige Vorbereitungen zu treffen.

Die orientierte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ enthalte die orientierte Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{R}^{k-1}$. Zum Punkt $P_0 \in \mathfrak{R}^{k-1}$ gibt es in $\mathfrak{M}^k$ eine Umgebung $U(P_0)$, die durch eine Abbildung $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{M}^k)$ uniformisiert wird, und für die $U(P_0) \cap \mathfrak{R}^{k-1}$ durch eine Abbildung $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{R}^{k-1})$ uniformisiert wird. Das Urbild $\mathfrak{R}^{k-1} = \alpha^{-1}(U(P_0) \cap \mathfrak{R}^{k-1})$ wird durch $\mathfrak{t}(\mathfrak{x}) = \alpha^{-1}\beta(\mathfrak{x})$ uniformisiert, wobei die Vektoren $\mathfrak{t}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{t}_{x_{k-1}}$ linear unabhängig sind. Setzt man für die Vektoren

$$\mathfrak{a}_\mu = \sum_{\nu=1}^{k} a_\mu^\nu\, \tilde{\mathfrak{e}}_\nu$$

$$(2.38) \qquad *[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{k-1}] = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} \tilde{\mathfrak{e}}_1, & \ldots, \tilde{\mathfrak{e}}_k \\ a_1^1, & \ldots, a_1^k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k-1}^1, & \ldots, a_{k-1}^k \end{vmatrix},$$

so wird die Normale $\mathfrak{n}$ im Punkt $\mathfrak{t}(\mathfrak{x})$ durch

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{x}) = \frac{{}^*[\mathfrak{t}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{t}_{x_{k-1}}]}{|{}^*[\mathfrak{t}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{t}_{x_{k-1}}]|} \tag{2.39}$$

gegeben. Da die Determinante $(\mathfrak{n}, \mathfrak{t}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{t}_{x_{k-1}}) = |\mathfrak{n}|^2 \, |{}^*[\mathfrak{t}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{t}_{x_{k-1}}]| > 0$ ist, bilden $\mathfrak{n}, \mathfrak{t}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{t}_{x_{k-1}}$ ein Rechtssystem.

Es liege $\mathfrak{M}^{k-1} \cap U(P_0)$ auf dem Rand der offenen Menge G. Dann besitze $\mathfrak{M}^{k-1}$ in P_0 eine *äußere Normale bezüglich* G, wenn es zu jeder Wahl von $\alpha \in \mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{M}^k)$ und $\beta \in \mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{M}^{k-1})$ ein $\tau_0 > 0$ gibt, so daß das Bild $\alpha(S^+)$ der Strecke $S^+ = [\mathfrak{y} = \mathfrak{n}(0)\,\tau$ mit $0 < \tau \leqq \tau_0]_{\mathfrak{y}}$ außerhalb G und das Bild $\alpha(S^-)$ der Strecke $S^- = [\mathfrak{y} = \mathfrak{n}(0)\,\tau$ mit $-\tau_0 \leqq \tau < 0]_{\mathfrak{y}}$ innerhalb G liegt. Offensichtlich reicht es, dies von einem Paar von Abbildungen α, β zu verlangen. Entsprechend definiert man die *innere Normale*. Liegt $\mathfrak{M}^{k-1}$ auf dem Rand der offenen Menge G, so sind die Mengen N_i der Punkte mit innerer Normalen und N_a der Punkte mit äußerer Normalen offen und fremd. Ist $Rd\,G = Rd\,\overline{G}$, so ist $N_i \cup N_a = \mathfrak{M}^{k-1}$, und ein zusammenhängendes $\mathfrak{M}^{k-1}$ besteht entweder nur aus N_i oder nur aus N_a; $\mathfrak{M}^{k-1}$ läßt sich also „nach außen" einheitlich (um)orientieren.

Den GAUSSschen Integralsatz hat G. G. LORENTZ [7] so formuliert: Die offene, beschränkte Menge G des n-dimensionalen Vektorraumes habe einen Rand F mit endlichem CARATHÉODORY-Maß der Dimension $k-1$ (μ-Maß). Bis auf eine μ-Nullmenge habe F eine äußere Normale $\mathfrak{n}$ bezüglich G. Die Funktionen $a_\nu(\mathfrak{x})$ seien in $\overline{G}$ stetig. Die rechte obere Derivierte $\overline{D}^+_{x_\nu} a_\nu$ von a_ν nach x_ν sei in G endlich und über jeden kompakten Teil von G integrierbar. $\sum_{\nu=1}^{k} (-1)^\nu \overline{D}^+_{x_\nu} a_\nu$ sei über G integrierbar. Dann ist

$$\int_F \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^\nu a_\nu(\mathfrak{x}) \cos(\mathfrak{n}, \mathfrak{e}_\nu)\, d_\mu F = \int_G \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^\nu \overline{D}^+_{x_\nu} a_\nu \, dx_1 \ldots dx_k, \tag{2.40}$$

wobei $d_\mu F$ das Oberflächenelement bezüglich des μ-Maßes ist.

In [7] wird der Satz zwar mit der partiellen Ableitung $a_{\nu x_\nu}$ statt $\overline{D}^+_{x_\nu} a_\nu$ bewiesen. Auf Grund eines Satzes von CARATHÉODORY [Reelle Funktionen, S. 597, Hauptsatz der Integralrechnung: $f(x) = f(a) + \int_a^x \overline{D}^+ f(x)\, dx$, wenn das Integral existiert, wenn $f(x)$ in $a \leqq x \leqq b$ stetig und $|\overline{D}^+ f(x)| < \infty$ bis auf abzählbar viele x ist] läßt sich der Beweis aber genau so für $\overline{D}^+_{x_\nu} a_\nu$ führen. Von jetzt an sollen die $a_\nu(\mathfrak{x})$ in jedem kompakten Teil K von G eine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllen. Dann ist $a_{\nu x_\mu}$ fast überall in G vorhanden, über K integrierbar und $|\overline{D}^+_{x_\mu} a_\nu| < \infty$. Setzt man

$$\partial \Phi^{k-1} = \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu(\mathfrak{x})\, \partial x_1 \ldots \partial x_{\nu-1}\, \partial x_{\nu+1} \ldots \partial x_k, \tag{2.41}$$

liegt die nach außen orientierte Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{N}^{k-1}$ auf dem Rand F, und ist $F_1 = F - \mathfrak{N}^{k-1}$ eine μ-Nullmenge, so geht (2.40) in

$$\int_{\mathfrak{N}^{k-1}} \partial \Phi^{k-1} = \int_G \partial\, \partial \Phi^{k-1} \tag{2.42}$$

über.

Ist das Differential (2.41) auf einer orientierten Mannigfaltigkeit gegeben, so erfülle es in einer offenen Menge G eine Lipschitz-Bedingung, wenn es zu jedem Punkt P_0 von G und jeder Abbildung $\alpha(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_{P_0}$ eine Umgebung $U(P_0)$ gibt, in der

$$|a_\nu(\alpha(\mathfrak{x}), \alpha) - a_\nu(\alpha(\mathfrak{x}'), \alpha)| \leqq L\, |\mathfrak{x} - \mathfrak{x}'|$$

gilt. L darf von α und P_0 abhängen. Eine Menge F auf $\mathfrak{M}^k$ habe ein endliches μ-Maß, wenn es zu jedem Punkt $P_0 \in F$ und jeder Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_{P_0}$ eine Umgebung $U(P_0)$ gibt, so daß das Urbild $\alpha^{-1}(U(P_0) \cap F)$ ein endliches μ-Maß hat.

Satz 8. Der Integralsatz von Stokes.

Voraussetzung. *Die orientierte, zweimal stetigdifferenzierbare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ enthalte die offene, beschränkte Menge G. Der Rand F von G enthalte die orientierte Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{N}^{k-1}$ von $\mathfrak{M}^k$, die bezüglich G eine äußere Normale habe. $F_1 = F - \mathfrak{N}^{k-1}$ sei eine Nullmenge des $(k-1)$-dimensionalen* Carathéodory-*Maßes (μ-Maß). F habe ein endliches μ-Maß. Das auf G stetige Differential $\partial \Phi^{k-1}$ erfülle in G eine* Lipschitz-*Bedingung. Seine Ableitung $\partial\, \partial \Phi^{k-1}$ sei über G integrierbar.*

Behauptung. *Es gilt*

$$\int_{\mathfrak{N}^{k-1}} \partial \Phi^{k-1} = \int_G \partial\, \partial \Phi^{k-1}. \tag{2.43}$$

Beweis. Zu jedem Punkt P_0 von $\overline{G}$ werden 3 offene Umgebungen bestimmt. Es gibt eine Abbildung $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_{P_0}$ und eine durch α uniformisierbare Umgebung $U(P_0)$ mit $\alpha^{-1}(U(P_0)) = U_3' = [|t_\nu| < 3]_\mathfrak{t}$. Weiter werden die Urbilder $G' = \alpha^{-1}(U(P_0) \cap G)$ und $F' = \alpha^{-1}(U(P_0) \cap F)$ eingeführt. Da F' ein endliches μ-Maß, also das Lebesguesche Maß Null hat, gibt es ein τ_ν mit $1 < \tau_\nu < 3$, so daß die Hyperebenen $t_\nu = \pm \tau_\nu$ aus F' eine Nullmenge des $(k-1)$-dimensionalen Lebesgueschen Maßes, also eine μ-Nullmenge ausschneiden. Nun setzt man $U_2' = [|t_\nu| < \tau_\nu]_\mathfrak{t}$ und $U_2(P_0) = \alpha(U_2')$. Weiter sei $G^* \equiv G^*(P_0) = G' \cap U_2'$ und $F^* = F^*(P_0) = \overline{G}^* - G^* = Rd\, G^*$. Für F^* gilt die Abschätzung

$$F^* \subseteqq \{F' \cap U_2'\} \cup \{F' \cap Rd\, U_2'\} \cup \{G' \cap Rd\, U_2'\}.$$

Auf $F' \cap U_2'$ existiert fast überall eine äußere Normale bezüglich G', die auch eine bezüglich G^* ist. Der Schnitt $F' \cap Rd\, U_2'$ ist eine μ-Nullmenge. Auf $G' \cap Rd\, U_2'$ ist, abgesehen von den Würfelkanten, die äußere Normale des Würfels auch äußere Normale bezüglich G^*. Der Rand F^* hat ein endliches μ-Maß. Es sei $U_1' = [|t_\nu| < 1]_\mathfrak{t}$ und $U_1(P_0) = \alpha(U_1')$. Endlich viele $U_1(P_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$ überdecken das kompakte $\overline{G}$. Zu $U(P_\nu)$ gehöre die Abbildung α_ν.

Zu $U_1(P_\nu)$ wählt man eine stetigdifferenzierbare DIEUDONNÉ-Zerlegung λ_ν von $\overline{G}$. Dann ist nach dem Integralsatz von GAUSS:

$$\begin{aligned}\int_G \partial(\lambda_\nu \partial \Phi^{k-1}) &= \int_{G \cap U_2(P_\nu)} \partial(\lambda_\nu \partial \Phi^{k-1}) \\ &= \int_{G^*(P_\nu)} \partial\{\lambda_\nu \partial \Phi^{k-1}(\alpha_\nu(t), \alpha_\nu)\} \\ &= \int_{F^*(P_\nu)} \lambda_\nu \partial \Phi^{k-1}(\alpha_\nu(t), \alpha_\nu) \\ &= \int_{\mathfrak{R}^{k-1}} \lambda_\nu \partial \Phi^{k-1}(P).\end{aligned}$$

Durch Summation erhält man

$$\int_G \partial \partial \Phi^{k-1} = \sum_{\nu=1}^{n} \int_G \partial(\lambda_\nu \partial \Phi^{k-1}) = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\mathfrak{R}^{k-1}} \lambda_\nu \partial \Phi^{k-1} = \int_{\mathfrak{R}^{k-1}} \partial \Phi^{k-1}$$

w. z. b. w.

Die zweimalige stetige Differenzierbarkeit von $\mathfrak{M}^k$ wird also lediglich gebraucht, um die Eindeutigkeit der Ableitung $\partial \partial \Phi^{k-1}$ zu sichern. Zwar ließen sich die gemachten Voraussetzungen noch abschwächen, jedoch wird auch so der Satz 8 für das Folgende ausreichen.

§ 3. Hyperkugel und Nullstellenflächen.

a) Vektordifferentiale.

Sind die Differentiale ∂A_ν^m auf einer gemeinsamen Menge M der orientierten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ erklärt, so sei

$$\partial \mathfrak{A}^m = (\partial A_1^m, \ldots, \partial A_n^m) \tag{3.1}$$

ein *Vektordifferential m-ter Stufe der Dimension n*. Für $m = 0$ ist $\partial A_\nu^0 = A_\nu$ eine Funktion, also $\mathfrak{a} = (A_1, \ldots, A_n)$ ein Vektor. Mit der *Summen*definition

$$\partial \mathfrak{A}^m + \partial \mathfrak{B}^m = (\partial A_1^m + \partial B_1^m, \ldots, \partial A_n^m + \partial B_n^m) \tag{3.2}$$

bilden die $\partial \mathfrak{A}^m$ einen Modul. Man setzt

$$\partial C^p \partial \mathfrak{A}^q = (\partial C^p \partial A_1^q, \ldots, \partial C^p \partial A_n^q) \tag{3.3}$$

$$\partial \mathfrak{A}^q \partial C^p = (\partial A_1^q \partial C^p, \ldots, \partial A_n^q \partial C^p). \tag{3.4}$$

Diese *Produkt*bildung ist assoziativ, distributiv und alternierend. Jedoch darf in jedem Produkt nur ein Faktor ein Vektor sein. Setzt man $\mathfrak{e}_\nu = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{\nu}, 0 \ldots 0)$ [10]), so erhält man $\partial \mathfrak{A}^m = \sum_{\nu=1}^{n} \partial A_\nu^m \mathfrak{e}_\nu$. Jedes Differential läßt sich eindeutig in Real- und Imaginärteil zerlegen: $\partial A^m = \partial A_{Re}^m + i \partial A^{Im}$ mit reellen ∂A_{Re}^m und ∂A_{Im}^m. Das *konjugiert-komplexe Differential* ist $\overline{\partial A^m} =$

[10]) Die Vektoren $\mathfrak{e}_\nu$ haben nichts mit den Vektoren $\tilde{\mathfrak{e}}_\nu$ von § 2 (2.1) bis (2.4) zu tun.

$\partial A^m_{Re} - i\,\partial A^m_{Im}$. Entsprechend sei $\overline{\partial \mathfrak{A}^m} = \sum_{\nu=1}^{n} \overline{\partial A}^m_\nu \mathfrak{e}_\nu$. Wegen $\overline{\partial\,\partial A}^m = \partial\,\overline{\partial A}^m$ ist der Übergang zum Konjugiert-Komplexen ein Modulautomorphismus.

Das *skalare Produkt* wird mittels einer positiv definiten HERMITEschen Form $\sum_{\mu,\nu=1}^{n} g_{\mu\nu} z_\mu \overline{z}_\nu$ erklärt:

$$(\partial \mathfrak{A}^p | \partial \mathfrak{B}^q) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} g_{\mu\nu}\, \partial A^p_\mu\, \overline{\partial B}^q_\nu. \tag{3.5}$$

Es gilt:

$$(\partial \mathfrak{A}^p | \partial \mathfrak{B}^q) = (-1)^{pq} (\overline{\partial \mathfrak{B}^q} | \overline{\partial \mathfrak{A}^p})$$

$$(\partial \mathfrak{A}^p_1 + \partial \mathfrak{A}^p_2 | \partial \mathfrak{B}^q) = (\partial \mathfrak{A}^p_1 | \partial \mathfrak{B}^q) + (\partial \mathfrak{A}^p_2 | \partial \mathfrak{B}^q)$$

$$\partial C^r\, (\partial \mathfrak{A}^p | \partial \mathfrak{B}^q) = (\partial C^r\, \partial \mathfrak{A}^p | \partial \mathfrak{B}^q)$$

$$(\partial \mathfrak{A}^p | \partial \mathfrak{B}^q)\, \partial C^r = (\partial \mathfrak{A}^p | \partial \mathfrak{B}^q\, \overline{\partial C}^r).$$

Die *Ableitung* wird durch $\partial\,\partial \mathfrak{A}^m = \sum_{\nu=1}^{n} \partial\,\partial A^m_\nu \mathfrak{e}_\nu$ erklärt. Es gilt:

$$\partial (\partial \mathfrak{A}^m_1 + \partial \mathfrak{A}^m_2) = \partial\,\partial \mathfrak{A}^m_1 + \partial\,\partial \mathfrak{A}^m_2$$

$$\partial (\partial C^p \cdot \partial \mathfrak{A}^q) = \partial\,\partial C^p\, \partial \mathfrak{A}^q + (-1)^p\, \partial C^p\, \partial\,\partial \mathfrak{A}^q$$

$$\partial (\partial \mathfrak{A}^p | \partial \mathfrak{B}^q) = (\partial\,\partial \mathfrak{A}^p | \partial \mathfrak{B}^q) + (-1)^p\, (\partial \mathfrak{A}^p | \partial\,\partial \mathfrak{B}^q).$$

Für die Vektoren $\mathfrak{e}_\mu$ ist speziell $g_{\mu\nu} = (\mathfrak{e}_\mu | \mathfrak{e}_\nu)$. Vom „Koordinatensystem" $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ kann man durch eine lineare Transformation $\mathfrak{e}'_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} c_{\mu\nu} \mathfrak{e}_\nu$ mit $\det(c_{\mu\nu}) \neq 0$ zu einem anderen Koordinatensystem $\mathfrak{e}'_{\nu_1}, \ldots, \mathfrak{e}'_n$ mit $g'_{\mu\nu} = (\mathfrak{e}'_\mu | \mathfrak{e}'_\nu) = \begin{cases} 0 \text{ für } \mu \neq \nu \\ 1 \text{ für } \mu = \nu \end{cases}$ übergehen. Ein solches Koordinatensystem heißt *normal*. Da es immer ein normales Koordinatensystem gibt, kann man bereits $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ als normal voraussetzen. Der Vektor $\mathfrak{w}$ hat den Betrag $|\mathfrak{w}| = \sqrt{(\mathfrak{w} | \mathfrak{w})}$.

Man setzt nun

$$\partial v_2(\mathfrak{w}) = \frac{i}{2} (\partial \mathfrak{w} | \partial \mathfrak{w}) = \frac{i}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \partial w_\nu\, \partial \overline{w}_\nu, \tag{3.6}$$

$$\partial \omega_2(\mathfrak{w}) = \frac{i}{2} |\mathfrak{w}|^{-4} \{(\mathfrak{w} | \mathfrak{w})\, (\partial \mathfrak{w} | \partial \mathfrak{w}) - (\partial \mathfrak{w} | \mathfrak{w})\, (\mathfrak{w} | \partial \mathfrak{w})\}, \tag{3.7}$$

$$\partial v_{2h}(\mathfrak{w}) = \frac{1}{h!} (\partial v_2)^h\ ^{11}), \qquad \partial \omega_{2h}(\mathfrak{w}) = \frac{1}{h!} (\partial \omega_2)^h\ ^{12}). \tag{3.8}$$

Ist die Funktion g differenzierbar, so gilt $\partial \omega_2(g \cdot \mathfrak{w}) = \partial \omega_2(\mathfrak{w})$. Auf jeder komplexen Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2h}$ *des Raumes* $\mathfrak{R}^{2n}$ *der komplexen Vektoren* $\mathfrak{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ ist das Differential $\partial v_{2h}(\mathfrak{z})$ das *euklidische Oberflächenelement*[11]),

[11]) Vergleiche [6], § 1.
[12]) Vergleiche [6], § 2.

und das Differential $\partial\omega_{2h}(\mathfrak{z})$ das *projektive*[11]). Deutet man durch $\overset{\mu}{\|}$ das Fehlen des Produktes $\partial z_\mu\,\partial\bar{z}_\mu$ an, so gilt:

$$(3.9)\qquad \partial v_{2n-2}(\mathfrak{z}) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\sum_{\mu=1}^{n}\partial z_1\,\partial\bar{z}_1\ldots\overset{\mu}{\|}\ldots\partial z_n\,\partial\bar{z}_n,$$

$$(3.10)\qquad \begin{cases} \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z}) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}|\mathfrak{z}|^{-2n}\sum\limits_{\substack{\mu,\nu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n} z_\mu\bar{z}_\nu\,\partial\bar{z}_\mu\,\partial z_\nu\,\partial z_1\,\partial\bar{z}_1\ldots\overset{\mu}{\|}\ldots\overset{\nu}{\|}\ldots\partial z_n\,\partial\bar{z}_n + \\ \qquad + \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}|\mathfrak{z}|^{-2n}\sum\limits_{\mu=1}^{n} z_\mu\bar{z}_\mu\,\partial z_1\,\partial\bar{z}_1\ldots\overset{\mu}{\|}\ldots\partial z_n\,\partial\bar{z}_n. \end{cases}$$

Beweis. Zunächst gilt:

$$(3.11)\qquad (\partial\mathfrak{z}\,|\,\partial\mathfrak{z})^h = \sum_{\mu|h}\partial z_{\mu_1}\,\partial\bar{z}_{\mu_1}\ldots\partial z_{\mu_h}\,\partial\bar{z}_{\mu_h} = h!\sum_{\nu|n-h}{}'\partial z_1\,\partial\bar{z}_1\ldots\overset{\nu_1\ldots\nu_h}{\|}\ldots\partial z_n\,\partial\bar{z}_n.$$

Aus (3.6), (3.8) und (3.11) folgt (3.9). Zudem ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{\{\partial\omega_2(\mathfrak{z})\}^{n-1}}{(n-1)!} &= \binom{i}{2}^{n-1}|\mathfrak{z}|^{-4n+4}\sum_{\mu+\nu=n-1}\frac{1}{\mu!\,\nu!}\,|\mathfrak{z}|^{2\mu}\,(\partial\mathfrak{z}\,|\,\partial\mathfrak{z})^\mu\,\{(\mathfrak{z}\,|\,\partial\mathfrak{z})\,(\partial\mathfrak{z}\,|\,\mathfrak{z})\}^\nu \\ &= \binom{i}{2}^{n-1}|\mathfrak{z}|^{-2n+2}\frac{(\partial\mathfrak{z}\,|\,\partial\mathfrak{z})^{n-1}}{(n-1)!} + \binom{i}{2}^{n-1}|\mathfrak{z}|^{-2n}\frac{(\partial\mathfrak{z}\,|\,\partial\mathfrak{z})^{n-2}}{(n-2)!}\,(\mathfrak{z}\,|\,\partial\mathfrak{z})\,(\partial\mathfrak{z}\,|\,\mathfrak{z}) \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}|\mathfrak{z}|^{-2n}\Big\{\sum_{\mu,\nu=1}^{n} z_\mu\bar{z}_\mu\,\partial z_1\,\partial\bar{z}_1\ldots\overset{\nu}{\|}\ldots\partial z_n\,\partial\bar{z}_n + \\ &\quad + \sum_{\mu<\nu}(z_\mu\bar{z}_\mu\,\partial\bar{z}_\mu\,\partial z_\mu + z_\nu\bar{z}_\nu\,\partial\bar{z}_\nu\,\partial z_\nu)\,\partial z_1\,\partial\bar{z}_1\ldots\overset{\mu}{\|}\ldots\overset{\nu}{\|}\ldots\partial z_n\,\partial\bar{z}_n + \\ &\quad + \sum_{\mu<\nu}(z_\mu\bar{z}_\nu\,\partial\bar{z}_\mu\,\partial z_\nu + z_\nu\bar{z}_\mu\,\partial\bar{z}_\nu\,\partial z_\mu)\,\partial z_1\,\partial\bar{z}_1\ldots\overset{\mu}{\|}\ldots\overset{\nu}{\|}\ldots\partial z_n\,\partial\bar{z}_n\Big\} \\ &= \text{Behauptung,} \qquad \text{w. z. b. w.}\end{aligned}$$

Ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ Parameterdarstellung einer komplexen Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n-2}$, und deutet $|^\mu$ das Fehlen von z_μ an, so gilt:

$$(3.12)\qquad \partial v_{2n-2}(\mathfrak{z}(\mathfrak{u})) = \sum_{\mu=1}^{n}\left|\frac{\partial(z_1,\ldots\overset{\mu}{|}\ldots,z_n)}{\partial(u_1,\ldots,u_{n-1})}\right|^2\partial v_{2n-2}(\mathfrak{u}),$$

$$(3.13)\qquad \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z}(\mathfrak{u})) = |\mathfrak{z}|^{-2n}\,|(\mathfrak{z},\mathfrak{z}_{u_1},\ldots,\mathfrak{z}_{u_{n-1}})|^2\,\partial v_{2n-2}(\mathfrak{u}).$$

Denn es ist

$$\begin{aligned}\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z}(\mathfrak{u})) &= |\mathfrak{z}|^{-2n}\sum_{\mu\neq\nu} z_\mu\bar{z}_\nu\,\frac{\partial(\bar{z}_\mu,z_\nu,z_1,\bar{z}_1,\ldots\overset{\mu}{\|}\ldots\overset{\nu}{\|}\ldots,z_n,\bar{z}_n)}{\partial(u_1,\bar{u}_1,\ldots,u_{n-1},\bar{u}_{n-1})}\,\partial v_{2n-2}(\mathfrak{u}) + \\ &\quad + |\mathfrak{z}|^{-2n}\sum_{\mu=1}^{n} z_\mu\bar{z}_\mu\,\frac{\partial(z_1,\bar{z}_1,\ldots\overset{\mu}{\|}\ldots,z_n,\bar{z}_n)}{\partial(u_1,\bar{u}_1,\ldots,u_{n-1},\bar{u}_{n-1})}\,\partial v_{2n-2}(\mathfrak{u}) \\ &= |\mathfrak{z}|^{-2n}\,|(\mathfrak{z},\mathfrak{z}_{u_1},\ldots,\mathfrak{z}_{u_{n-1}})|^2\,\partial v_{2n-2}(\mathfrak{u}).\end{aligned}$$

Auf jeder komplexen, $(2n-2)$ dimensionalen Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{R}^{2n}$ hat also die projektive Maßbestimmung $\partial\omega_{2n-2}$ eine nichtnegative Dichte. Sie verschwindet nur in den Punkten, deren Tangentialraum durch den Nullpunkt geht.

b) Hyperkugel und projektiver Raum.

Der komplexe projektive Raum $\mathfrak{P}^{2n-2}$ der Punkte $\mathfrak{v}=(v_1:v_2:\ldots:v_{\mu-1}:1:0:\ldots:0)$ mit $\mu=1,2,\ldots,n-1$ wird durch[13])

$$\mathfrak{q}=\mathfrak{a}(\mathfrak{v})=\sum_{\nu=1}^{\mu-1}\frac{v_\nu}{\sqrt{1+v^2}}\,\mathfrak{e}_\nu+\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\,\mathfrak{e}_\mu;\qquad v=\sqrt{\sum_{\nu=1}^{\mu-1}|v_\nu|^2} \tag{3.14}$$

eineindeutig und stetig auf eine *Teilmenge* Q der Einheitskugel abgebildet. Die Abbildung $\mathfrak{a}(\mathfrak{v})$ ist auf jeder der Mengen $A_\mu=[v_{\mu+1}=\cdots=v_n=0]_{\mathfrak{v}}$, $1\leqq\mu\leqq n$ reellanalytisch und topologisch. Die Umkehrung auf der Menge $Q_\mu=\mathfrak{a}(A_\mu)$ ist

$$v_\nu=\frac{q_\nu}{q_\mu}\quad\text{für}\quad\nu=1,\ldots,\mu-1. \tag{3.15}$$

Der Produktraum $\mathfrak{P}^{2n-2}\times[|z|<\infty]$ wird durch die Abbildung $\mathfrak{z}=z\,\mathfrak{a}(\mathfrak{v})$ stetig auf $\mathfrak{R}^{2n}$ abgebildet. Die Abbildung ist auf jeder der Mengen $A_\mu\times[0<|z|<\infty]$ topologisch und reellanalytisch. Die Umkehrung ist dort $v_\nu=\frac{z_\nu}{z_\mu}$ für $\nu=1,\ldots,\mu-1$ und $z=\frac{z_\mu}{|z_\mu|}|\mathfrak{z}|$. Der Produktraum $\mathfrak{P}^{2n-2}\times[0\leqq\varphi<2\pi]$ wird durch $\mathfrak{z}=e^{i\varphi}\,\mathfrak{a}$ stetig auf die Einheitskugel abgebildet. Die Abbildung ist auf jeder der Mengen $A_\mu\times[0\leqq\varphi<2\pi]$ topologisch und reellanalytisch. Die Umkehrung ist dort: $v_\nu=\frac{z_\nu}{z_\mu}$ für $\nu=1,\ldots,\mu-1$ und $\varphi=\arg z_\mu$ mit $0\leqq\varphi<2\pi$. Weiter bildet

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{u})=\sum_{\nu=1}^{n-1}u_\nu\,\mathfrak{e}_\nu+\sqrt{1-u^2}\,\mathfrak{e}_n\quad\text{mit}\quad u=\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n-1}|u_\nu|^2} \tag{3.16}$$

die Menge $Q'_\mu=[u=1,u_\mu>0,u_{\mu+1}=\cdots=u_n=0]_{\mathfrak{u}}$ für $\mu<n$ bzw. $Q'_n=[u<1]_{\mathfrak{u}}$ für $\mu=n$ topologisch und reellanalytisch auf Q ab. Die Vereinigung $Q'=\bigcup_{\mu=1}^{n}Q'_\mu$ wird eineindeutig und stetig auf Q abgebildet. Durch $\mathfrak{z}=e^{i\varphi}\,\mathfrak{q}(\mathfrak{u})$ wird die Menge $Q'\times[0\leqq\varphi<2\pi]$ eineindeutig und stetig auf die Einheitskugel abgebildet. Die Abbildung ist auf jeder der Mengen $Q'_\mu\times[0\leqq\varphi<2\pi]$ topologisch und reellanalytisch. Die Umkehrung ist $u_\nu=\frac{|z_\mu|}{z_\mu}\frac{z_\nu}{|\mathfrak{z}|}$ für $\nu=1,\ldots,\mu-1$ und $\varphi=\arg z_\mu$ mit $0\leqq\varphi<2\pi$. Durch $\mathfrak{z}=z\,\mathfrak{q}(\mathfrak{u})$ wird die Menge $Q'\times[|z|<\infty]$ stetig auf $\mathfrak{R}^{2n}$ abgebildet. Die Abbildung ist auf jeder der Mengen $Q'_\mu\times[0<|z|<\infty]$ topologisch und reellanalytisch. Die Umkehrung lautet $u_\nu=\frac{|z_\mu|}{z_\mu}\frac{z_\nu}{|\mathfrak{z}|}$ für $\nu=1,\ldots,\mu-1$ und $z=\frac{z_\mu}{|z_\mu|}|\mathfrak{z}|$.

[13]) Zu den Gln. (3.14) bis (3.22) vergleiche [6], § 3.

Die Menge Q ist ein Repräsentant des projektiven Raumes $\mathfrak{P}^{2n-2}$ im $\mathfrak{R}^{2n}$. Ein Integral über $M \subseteq Q$ werde als Integral über die Teilmenge $M \cap Q_n$ der reellanalytischen Teilmannigfaltigkeit Q_n von $\mathfrak{R}^{2n}$ erklärt.

Wegen $|\mathfrak{q}| = 1$, ist $(\partial\mathfrak{q}\,|\,\mathfrak{q}) + (\mathfrak{q}\,|\,\partial\mathfrak{q}) = 0$. Setzt man die Parameterdarstellung $\mathfrak{z} = z \cdot \mathfrak{q}(\mathfrak{u})$ in das Differential $\partial v_{2n}(\mathfrak{z})$ ein, und berücksichtigt, daß $\mathfrak{q}(\mathfrak{u})$ nur von $(2n-2)$ Veränderlichen abhängt, so erhält man wegen $\partial\mathfrak{z} = z\,\partial\mathfrak{q} + \mathfrak{q}\,\partial z$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}\partial v_{2n}(\mathfrak{z}) &= \frac{1}{n!}\left(\frac{i}{2}\right)^n \{\partial z\,\partial\bar{z} + (z\,\partial\bar{z} - \bar{z}\,\partial z)\,(\partial\mathfrak{q}\,|\,\mathfrak{q}) + z\bar{z}\,(\partial\mathfrak{q}\,|\,\partial\mathfrak{q})\}^n \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{|z|^{2n-2}}{(n-1)!}\,\partial z\,\partial\bar{z}\,(\partial\mathfrak{q}\,|\,\partial\mathfrak{q})^{n-1} = \frac{i}{2}\,|z|^{2n-2}\,\partial z\,\partial\bar{z}\,\partial v_{2n-2}(\mathfrak{q}),\end{aligned}$$

$$(3.17)\qquad \partial v_{2n}(\mathfrak{z}) = \frac{i}{2}\,|z|^{2n-2}\,\partial z\,\partial\bar{z}\,\partial v_{2n-2}(\mathfrak{q}) = \frac{i}{2}\,|z|^{2n-2}\,\partial z\,\partial\bar{z}\,\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{q}).$$

Ist $\partial v_{2n-1}(\mathfrak{y})$ das euklidische Oberflächenelement der Kugel $[|\mathfrak{y}| = r]$, so wird

$$(3.18)\qquad \partial v_{2n}(\mathfrak{z}) = \partial r\,\partial v_{2n-1}(\mathfrak{y}),$$

$$(3.19)\qquad \partial v_{2n-1}(re^{i\varphi}\mathfrak{q}) = r^{2n-1}\,\partial\varphi\,\partial v_{2n-2}(\mathfrak{q}) = r^{2n-1}\,\partial\varphi\,\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{q}),\quad (r = \text{const}),$$

$$(3.20)\qquad \partial v_{2n-2}(e^{i\varphi}\mathfrak{q}) = \partial\omega_{2n-2}(e^{i\varphi}\mathfrak{q}) = \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{q}) = \partial v_{2n-2}(\mathfrak{q}).$$

Wegen $\partial q_n = \partial\bar{q}_n$ gilt nach (3.16)

$$\partial\omega_2(\mathfrak{q}) = \partial v_2(\mathfrak{q}) = \frac{i}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\partial q_\nu\,\partial\bar{q}_\nu = \frac{i}{2}\sum_{\nu=1}^{n-1}\partial u_\nu\,\partial\bar{u}_\nu = \partial v_2(\mathfrak{u}).$$

Also wird

$$(3.21)\qquad \partial v_{2n-2}(\mathfrak{q}) = \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{q}) = \partial v_{2n-2}(\mathfrak{u}).$$

Identifiziert man in der Hyperkugel $[|\mathfrak{u}| \leq 1]$ alle Punkte $|\mathfrak{u}| = 1$ die auf derselben 2-dimensionalen analytischen Ebene durch den Nullpunkt liegen, so entsteht ein Modell des projektiven Raumes $\mathfrak{P}^{2n-2}$. Die projektive Maßbestimmung $\partial\omega_{2n-2}$ ist die euklidische Maßbestimmung dieses Modelles. Daraus ergeben sich induktiv die Inhalte:

$$(3.22)\qquad \begin{cases} W_{2n-2} = \displaystyle\int_Q \partial\omega_{2n-2} = \frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!} \\ V_{2n-1}(r) = \displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|=r} \partial v_{2n-1} = \frac{2\pi^n}{(n-1)!}\,r^{2n-1} \\ V_{2n}(r) = \displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|<r} \partial v_{2n} = \frac{\pi^n}{n!}\,r^{2n}. \end{cases}$$

Zum Beweis hätte auch der folgende Hilfssatz dienen können.

Hilfssatz 1[14]. *Wenn in den folgenden Gl.* (3.23) *bzw.* (3.24) *je eines der beiden Integrale existiert, so existieren beide.*

[14]) Vergleiche [*14*], Kap. III, § 2 (2.8).

a) *Wenn* $F(\mathfrak{z}) = F(\lambda\,\mathfrak{z})$ *für alle* $\lambda > 0$ *ist, so gilt:*

$$\frac{1}{V_{2n-1}(r)} \int\limits_{|\mathfrak{z}|=r} F(\mathfrak{z})\,\partial v_{2n-1} = \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{|\mathfrak{z}|<\infty} F(\mathfrak{z})\, e^{-|\mathfrak{z}|^2}\,\partial v_{2n}. \tag{3.23}$$

b) *Wenn* $F(\mathfrak{z}) = F(\lambda\,\mathfrak{z})$ *für alle komplexen* $\lambda \neq 0$ *ist, so gilt:*

$$\frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_{\mathfrak{z}\in Q} F(\mathfrak{z})\,\partial\omega_{2n-2} = \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{|\mathfrak{z}|<\infty} F(\mathfrak{z})\, e^{-|\mathfrak{z}|^2}\,\partial v_{2n}. \tag{3.24}$$

Beweis. Wenn das Ausgangs- oder Endintegral existiert, so gilt:

$$\frac{1}{\pi^n} \int\limits_{|\mathfrak{z}|<\infty} e^{-|\mathfrak{z}|^2} |F(\mathfrak{z})|\,\partial v_{2n} = \frac{1}{\pi^n} \int\limits_0^\infty r^{2n-1} e^{-r^2}\,dr \cdot \int\limits_{|\mathfrak{z}|=1} |F|\,\partial v_{2n-1}$$

$$= \frac{1}{V_{2n-1}(r)} \int\limits_{|\mathfrak{z}|=r} |F|\,\partial v_{2n-1}$$

im Fall b) rechnet man weiter

$$= \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_Q \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |F(r\,e^{i\varphi}\,\mathfrak{z})|\,\partial\varphi \right\} \partial\omega_{2n-2} = \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_Q |F|\,\partial\omega_{2n-2}.$$

Nachträglich gilt die Rechnung auch für F statt $|F|$, w. z. b. w.

c) Nullstellenflächen.

Eine Teilmenge $\mathfrak{N}$ des Gebietes G heißt eine *Nullstellenfläche*[15]) (analytische Fläche, charakteristische Fläche), wenn es zu jedem Punkt $\mathfrak{z}_0 \in \mathfrak{N}$ eine Umgebung $U(\mathfrak{z}_0)$ und eine in $U(\mathfrak{z}_0)$ analytische Funktion $g(\mathfrak{z}) \not\equiv 0$ gibt, so daß $\mathfrak{N} \cap U(\mathfrak{z}_0) = [g(\mathfrak{z}) = 0] \cap U(\mathfrak{z}_0)$ ist. Dabei kann man $U(\mathfrak{z}_0)$ und $g(\mathfrak{z})$ immer so wählen, daß bezüglich jeden Punktes $\mathfrak{z}_1 \in U(\mathfrak{z}_0) \cap \mathfrak{N}$ die Funktion g im Integritätsbereich der in $\mathfrak{z}_1$ regulären Funktionen nur in einfache Primfaktoren zerfällt. Der Punkt $\mathfrak{z}_0$ heiße gewöhnlich, wenn $\partial g \neq 0$ in $\mathfrak{z}_0$ ist. Diese Definition hängt nicht von der Wahl von g und $U(\mathfrak{z}_0)$ ab. Die gewöhnlichen Punkte von $\mathfrak{N}$ bilden eine $(2n-2)$ dimensionale, komplexe *Teilmannigfaltigkeit* $\hat{\mathfrak{N}}$ *von* $\mathfrak{R}^{2n}$.

Der Ausdruck $(\mathfrak{z}_0; g_0)$ mit $g_0(\mathfrak{z}_0) = 0$ heiße ein *Flächenelement*, wenn die analytische Funktion g_0 im Punkt $\mathfrak{z}_0$ irreduzibel ist. Zwei Flächenelemente $(\mathfrak{z}_0; g_0)$, $(\mathfrak{z}_1; g_1)$ sind dann und nur dann gleich, wenn $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z}_1$ und $g_0 \cdot g_1^{-1} \neq 0$ und regulär in $\mathfrak{z}_0$ ist. Das Flächenelement $(\mathfrak{z}_0; g_0)$ gehört dann und nur dann zur Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$, wenn $\mathfrak{z}_0 \in \mathfrak{N}$ ist, und g_0 die Funktion g im Punkt $\mathfrak{z}_0$ teilt, die $\mathfrak{N}$ in einer Umgebung von $\mathfrak{z}_0$ darstellt. *Reduzibel* heißt eine Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$, wenn sie in zwei Nullstellenflächen zerfällt, $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2$ die kein gemeinsames Flächenelement haben, andernfalls heißt die Nullstellenfläche *irreduzibel*. Wenn eine Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ im Gebiet $G_1 \supset G$ irreduzibel ist, so kann $\mathfrak{N} \cap G$ reduzibel im Gebiet G sein.

[15]) Vergleiche [3], Kap. II, § 2, S. 280—281 und Kap. V, § 2, S. 314—315.

Um die *Vielfachheit der a-Stelle* einer meromorphen Funktion $f(\mathfrak{z})$ im Punkt $\mathfrak{z}_0$ zu definieren, setzt man $a = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ und $f(\mathfrak{z}) = \frac{w_1(\mathfrak{z})}{w_2(\mathfrak{z})}$ mit in $\mathfrak{z}_0$ regulären und teilerfremden Funktionen w_1 und w_2. Der Wert $a = \infty$ wird durch $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$ erfaßt. Dann entwickelt man $\alpha_1 w_2 \cdot (f - a) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = \sum_{\mu=\nu}^{\infty} f_\mu(\mathfrak{z} \quad \mathfrak{z}_0)$ nach homogenen Polynomen f_μ um $\mathfrak{z}_0$. Das Polynom f_μ hat den Grad μ. Das Polynom f_ν mit kleinstem Grad verschwinde nicht identisch. Dann ist $\nu = \nu(\mathfrak{z}_0, a) = \nu(\mathfrak{z}_0, a, f)$ die Vielfachheit der „a-Stelle" $\mathfrak{z}_0$ bezüglich f. Ist $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = 0$, so sei $\nu(\mathfrak{z}_0, a, f) = \infty$. Die Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z}_0, a) \geqq 0$ ist dann und nur dann positiv, wenn $f(\mathfrak{z}_0) = a$ ist, oder wenn die Funktion f in $\mathfrak{z}_0$ eine Unbestimmtheitsstelle hat. Besitzt die nichtkonstante Funktion f eine a-Stelle, so ist die Menge $\mathfrak{N}(a) = [\nu(\mathfrak{z}, a) > 0]_{\mathfrak{z}}$ eine abgeschlossene Nullstellenfläche im Meromorphiegebiet von f und heiße die *a-Stellenfläche* der Funktion f. Betrachtet man die Funktion f längs der komplexen Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2k}$ von $\mathfrak{R}^{2n}$, und wählt man zum Punkt $\mathfrak{z}_0 \in \mathfrak{M}^{2k}$ eine beliebige Abbildung $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{z}_0}(\mathfrak{M}^{2k})$, so ist die Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z}_0, a, f; \mathfrak{M}^{2k}) = \nu(0, a, f(\mathfrak{z}(\mathfrak{u})))$ der a-Stelle bezüglich der Funktion f *längs* $\mathfrak{M}^{2k}$ unabhängig von der Wahl von $\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ erklärt. Ist $\Omega \neq 0$ und regulär in $\mathfrak{z}_0$, so haben die Funktionen f und $f \cdot \Omega$ die gleiche Vielfachheit der Nullstelle $\mathfrak{z}_0$.

Eine Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ besteht im Gebiet G aus größten irreduziblen Teilen $\mathfrak{N}_\mu$ also $\mathfrak{N} = \bigcup_{\mu=1}^{s} \mathfrak{N}_\mu$ mit $1 \leqq s \leqq \infty$. Jedem $\mathfrak{N}_\mu$ werde eine „*globale*" *Vielfachheit* p_μ zugeordnet. Die „*örtliche*" *Vielfachheit* von $\mathfrak{N}$ im Punkt $\mathfrak{z}_0$ werde wie folgt erklärt. Ist $\mathfrak{z}_0 \notin \mathfrak{N}$, so sei $\nu(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{N}) = 0$ und $\nu(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{N}; \mathfrak{M}^{2k}) = 0$. Ist $\mathfrak{z}_0 \in \mathfrak{N}$, so seien $\mathfrak{N}_{\mu_1}, \ldots, \mathfrak{N}_{\mu_t}$ mit $1 \leqq t < \infty$ gerade die durch den Punkt $\mathfrak{z}_0$ gehenden größten irreduzibeln Teile von $\mathfrak{N}$. Zu jedem solchen Teil $\mathfrak{N}_\mu$ gibt es eine in $\mathfrak{z}_0$ analytische Funktion g_μ, deren Nullstellen in einer Umgebung von $\mathfrak{z}_0$ gerade den dortigen Bestandteil von $\mathfrak{N}_\mu$ abgeben, und die in jedem Punkt dieser Umgebung keine mehrfachen Primfaktoren hat. Dann ist die Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z}_0) = \nu(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{N}) = \sum_{\tau=1}^{t} p_{\mu_\tau} \nu(\mathfrak{z}_0, 0, g_{\mu_\tau})$ bzw. $\nu(\mathfrak{z}_0; \mathfrak{M}^{2k}) = \nu(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{N}; \mathfrak{M}^{2k}) = \sum_{\tau=1}^{t} p_{\mu_\tau} \nu(\mathfrak{z}_0, 0, g_{\mu_\tau}; \mathfrak{M}^{2k})$ unabhängig von der Wahl der Funktionen g_μ erklärt. In diesem und nur in diesem Sinne sagt man, man habe dem Punkt $\mathfrak{z}_0 \in \mathfrak{N}$ eine Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z}_0)$ bzw. $\nu(\mathfrak{z}_0; \mathfrak{M}^{2k})$ zugeordnet. Da in jedem gewöhnlichen Punkt $\mathfrak{z}_0$ der Nullstellenfläche die Gleichung $\nu(\mathfrak{z}_0) = p_\mu$ für genau ein μ gilt, sind umgekehrt die globalen Vielfachheiten p_μ durch die örtliche Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ eindeutig bestimmt. Insbesondere darf man der a-Stellenfläche $\mathfrak{N}(a)$ einer Funktion f die Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z}, \mathfrak{N}(a)) = \nu(\mathfrak{z}, a, f)$ zuordnen.

Wenn $\mathfrak{M}^{2k}$ die zweidimensionale Ebene $\mathfrak{z} = z\,\mathfrak{a}$ mit konstantem Vektor $\mathfrak{a} \neq 0$ ist, so werde $\nu(\mathfrak{z}; \mathfrak{M}^{2k}) = \nu(z; \mathfrak{a})$ abgekürzt. Wenn $\mathfrak{M}^{2k}$ die zweidimensionale Ebene $z_\varrho = b_\varrho$, $\varrho = 1, \ldots, \mu-1, \mu+1, \ldots, n$ ist, so werde $\nu(\mathfrak{z}; \mathfrak{M}^{2k}) = \nu_\mu(\mathfrak{z})$ abgekürzt.

Mit $\mathfrak{O}$ werde die Menge der offenen Mengen des Gebietes G bezeichnet. Mit $\mathfrak{F}$ werde die Menge der Funktionen f, die auf einer, von f abhängigen offenen Menge $O \in \mathfrak{O}$ analytisch sind, bezeichnet. Eine COUSINsche *Verteilung* (II. Art)[16] ist eine Teilmenge $F_G \subset \mathfrak{F} \times \mathfrak{O}$, für die gilt:

1. *Wenn* $(f, O) \in F_G$ *ist, so ist die Funktion* f *auf* O *analytisch.*

2. *Zu jedem Punkt* $P \in G$ *gibt es ein* $(f, O) \in F_G$ *mit* $P \in O$.

3. *Gehören* (f_1, O_1) *und* (f_2, O_2) *zu* F_G, *so ist* $f_1 f_2^{-1} \neq 0$ *und regulär im Durchschnitt* $O_1 \cap O_2$.

Ist die Funktion f im Gebiet G analytisch, so ist beispielsweise die Menge mit dem einzigen Element (f, G) eine COUSINsche Verteilung. Es sei F_G irgendeine COUSINsche Verteilung. Zum Punkt $\mathfrak{z}_0 \in G$ wählt man $(f, O) \in F_G$ mit $\mathfrak{z}_0 \in O$ beliebig. Die Vielfachheit der „Nullstelle" $\mathfrak{z}_0$ von F_G ist dann durch $\nu(\mathfrak{z}_0) \equiv \nu(\mathfrak{z}_0, F_G) = \nu(\mathfrak{z}_0, 0, f)$ unabhängig von der Wahl von (f, O) erklärt. Die Menge $[\nu(\mathfrak{z}) > 0]_3$ ist im Gebiet G eine abgeschlossene Nullstellenfläche mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$. Umgekehrt gibt es zu jeder im Gebiet G abgeschlossenen Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ eine COUSINsche Verteilung, die auf $\mathfrak{N}$ und nur auf $\mathfrak{N}$, und zwar mit der vorgeschriebenen Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ verschwindet.

Wenn die Nullstellenflächen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ kein Flächenelement gemeinsam haben, so besteht ihr Durchschnitt $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$ nach dem zweiten WEIERSTRASSschen Satz[17] aus höchstens abzählbar vielen komplexen Mannigfaltigkeiten mit Dimensionen kleiner als $2n-2$, wobei in jedem kompakten Teil von $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2$ nur endlich viele liegen. Bezeichnet man, wie in der ganzen Arbeit, die Teilmannigfaltigkeit der gewöhnlichen Punkte von $\mathfrak{N}$ mit $\hat{\mathfrak{N}}$, so unterscheiden sich $\hat{\mathfrak{N}}$ und $\hat{\mathfrak{N}}_1 \cup \hat{\mathfrak{N}}_2$ nur um eine Nullmenge auf $\hat{\mathfrak{N}}_1 \cup \hat{\mathfrak{N}}_2 \geq \hat{\mathfrak{N}}$. Daher ist die Integraldefinition

$$\int_{\mathfrak{N} \cap M} \partial \chi^{2n-2} = \int_{\hat{\mathfrak{N}} \cap M} \partial \chi^{2n-2} \tag{3.25}$$

sinnvoll. Die Sätze 3 bis 7 gelten. Mit der Existenzaussage in Satz 2 verhält es sich dagegen nicht so. Wenn nämlich M in einer kompakten Teilmenge K von $\mathfrak{N}$ liegt, also auf $\mathfrak{N}$ beschränkt ist, so braucht $K \cap \hat{\mathfrak{N}}$ nicht kompakt, also $M \cap \hat{\mathfrak{N}}$ auf $\hat{\mathfrak{N}}$ nicht beschränkt zu sein. Ist ein Differential $\partial \chi^{2n-2}$ über eine auf $\mathfrak{N}$ beschränkte Menge M örtlich integrierbar, so braucht es nicht über M integrierbar zu sein. Daß dies in den wichtigsten Fällen doch richtig ist, wäre leicht sofort zu zeigen, ergibt sich aber später in Satz 11 von selbst.

Es ist ohne weiteres ersichtlich, wie sich die Begriffe: „Nullstellenfläche, Vielfachheit einer a-Stelle, COUSINsche Verteilung und Integral über eine Nullstellenfläche gemäß (3.25)" übertragen, wenn man statt des umgebenden $\mathfrak{z}$-Raumes $\mathfrak{R}^{2n}$ eine $2n$-dimensionale, komplexe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ wählt.

[16] Vergleiche [3], Kap. V, § 4, Satz 33, S. 321.

[17] Vergleiche [9], Kap. II, § 17, S. 131—134 und [11], S. 79.

Es braucht darauf nicht weiter eingegangen zu werden. Nun folgen einige Hilfssätze über die Verhältnisse im $\mathfrak{z}$-Raum.

Hilfssatz 2. *Mit Q werde die Darstellung des projektiven Raumes von § 3 b, mit $\hat{\mathfrak{R}}$ die Menge der gewöhnlichen Punkte der Nullstellenfläche $\mathfrak{R}$ bezeichnet. Dann projiziert sich eine Nullmenge N von $\hat{\mathfrak{R}}$ in eine Nullmenge $\dot{N} = [\mathfrak{z} = z\,\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q} \in Q]_{\mathfrak{q}}$ von Q.*

Hilfssatz 3. *Die komplexe Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2k}$ von $\mathfrak{R}^{2n}$ mit $2k < 2n-2$ projiziert sich in eine Nullmenge $\dot{\mathfrak{M}} = [\mathfrak{z} = z\,\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}^{2k}]_{\mathfrak{q}}$ von Q.*

Beweise. In Hilfssatz 3 sei $\dot{N} = \dot{\mathfrak{M}}$ und $N \equiv \hat{\mathfrak{R}} = \mathfrak{M}^{2k}$ gesetzt. Die Menge $N_1 = N \cap [z_n = 0]$ projiziert sich in eine Nullmenge $\dot{N}_1$ von Q. Die Projektion von $N_2 = N - N_1$ sei $\dot{N}_2$. Nun wählt man den Punkt $\mathfrak{y} \in \hat{\mathfrak{R}} - [z_n = 0]$, die Abbildung $\alpha(\mathfrak{w}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{w}) \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{y}}(\hat{\mathfrak{R}})$ und die Umgebung $U(\mathfrak{y}|\alpha) \leqq \hat{\mathfrak{R}} - [z_n = 0]$ beliebig. Durch α wird $N_2' = \alpha^{-1}(U(\mathfrak{y}|\alpha) \cap N_2)$ auf die Menge $N_2 \cap U(\mathfrak{y}|\alpha)$ abgebildet, diese wird auf $\dot{N}_2^*$ in Q projiziert, und $\dot{N}_2^*$ durch die Umkehrung von $\mathfrak{a}(\mathfrak{v})$ auf $\dot{N}_2' = \mathfrak{a}^{-1}(\dot{N}_2^*)$ abgebildet. Nach (3.14) wird N_2' durch $\mathfrak{v}(\mathfrak{w}) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{z_\nu(\mathfrak{w})}{z_n(\mathfrak{w})}\,\mathfrak{e}_\nu$ auf $\dot{N}_2'$ abgebildet. Da diese analytische Abbildung meßbar ist, ist im Falle von Hilfssatz 2 mit N_2' auch $\dot{N}_2'$ eine Nullmenge. Im Falle von Hilfssatz 3 ist $\dot{N}_2'$ eine $2k < 2n-2$ dimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit des $\mathfrak{R}^{2n-2}$ also eine Nullmenge. In beiden Fällen ist die Projektion $\dot{N}_2^* = \mathfrak{a}(\dot{N}_2')$ von $U(\mathfrak{y}|\alpha) \cap N$ eine Nullmenge auf Q. Abzählbar viele $\dot{N}_2^*$ überdecken die Projektion $\dot{N}_2$ von N_2. Daher ist $\dot{N} = \dot{N}_1 \cup \dot{N}_2$ eine Nullmenge auf Q, w. z. b. w.

Der Durchschnitt der Teilmenge M von $\mathfrak{R}^{2n}$ mit der Kugelschale $[r \leqq |\mathfrak{z}| \leqq s]$ werde mit M_{rs} bezeichnet.

Hilfssatz 4. *$\hat{\mathfrak{R}}_{rr}$ ist eine Nullmenge auf $\hat{\mathfrak{R}}$. Die Projektion $\dot{N} = [r\,e^{i\varphi}\,\mathfrak{q} \in \mathfrak{R}_{rr}$ mit $\mathfrak{q} \in Q]_{\mathfrak{q}}$ ist eine Nullmenge auf Q.*

Beweis. Die Funktion $\varphi(z)$ sei analytisch und die Zahl ϱ konstant. Wäre nun $|\varphi(z)|^2 + |z|^2 \equiv \varrho^2$, so wäre $4|\varphi'|^2 + 4 = \Delta(|\varphi|^2 + |z|^2) = 0$, was unmöglich ist. Also besteht die meßbare Menge $[|\varphi(z)|^2 + |z|^2 = \varrho^2]$ aus höchstens abzählbar vielen analytischen Kurven, ist also eine Nullmenge der z-Ebene. Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems läßt sich in einer Umgebung $U(\mathfrak{z}_0)$ eines Punktes $\mathfrak{z}_0 \in \hat{\mathfrak{R}}_{rr}$ die Mannigfaltigkeit $\hat{\mathfrak{R}}$ durch $z_n = \varphi(z_1, \ldots, z_{n-1})$ darstellen. Dabei ist φ eine analytische Funktion. Auf $\mathfrak{R}_{rr}$ gilt $|\varphi(z_1, \ldots, z_{n-1})|^2 + \sum_{\nu=1}^{n-1} |z_\nu|^2 = r^2$. Bei festem $z_2, \ldots, z_{n-1}$ definiert das eine Nullmenge der z_1-Ebene. Also ist auf $\hat{\mathfrak{R}}$ das meßbare $\hat{\mathfrak{R}}_{rr} \cap U(\mathfrak{z}_0)$ eine Nullmenge. Dasselbe gilt dann von $\hat{\mathfrak{R}}_{rr}$. Die Projektion von $\hat{\mathfrak{R}}_{rr}$ auf Q ist nach Hilfssatz 2 und die von $\mathfrak{R}_{rr} - \hat{\mathfrak{R}}_{rr}$ nach Hilfssatz 3 eine Nullmenge, w. z. b. w.

Eine Menge M heiße *sternförmig* (zum Nullpunkt), wenn mit dem Punkt $\mathfrak{z}_0 \in M$ für ein $\varepsilon > 0$ auch alle Punkte $\lambda\,\mathfrak{z}_0$ mit $1 - \varepsilon < \lambda < 1 + \varepsilon$ zu M gehören.

Hilfssatz 5.

Voraussetzung. $\mathfrak{N}$ *sei eine irreduzible Nullstellenfläche. Der Ursprung gehöre nicht zur Menge* $\hat{\mathfrak{N}}$ *der gewöhnlichen Punkte von* $\mathfrak{N}$.

Behauptung.

a) *Dann und nur dann ist* $\hat{\mathfrak{N}}$ *sternförmig, wenn es ein Flächenelement* $(\mathfrak{z}_0; h)$ *von* $\hat{\mathfrak{N}}$ *und eine Umgebung* $U(\mathfrak{z}_0)$ *von* $\mathfrak{z}_0$ *gibt, in der gilt:*

$$(3.26) \qquad U(\mathfrak{z}_0) \cap [h(\mathfrak{z}) = 0]_{\mathfrak{z}} = U(\mathfrak{z}_0) \cap \hat{\mathfrak{N}} \subseteq U(\mathfrak{z}_0) \cap \left[\sum_{\nu=1}^{n} h_{z_\nu} \cdot z_\nu = 0\right]_{\mathfrak{z}}.$$

b) *Wenn* $\hat{\mathfrak{N}}$ *sternförmig ist, so gilt* (3.26) *für jedes Flächenelement von* $\hat{\mathfrak{N}}$, *und das Differential* $\partial\omega_{2n-2}$ *verschwindet längs* $\hat{\mathfrak{N}}$.

c) *Wenn* $\hat{\mathfrak{N}}$ *nicht sternförmig ist, so ist die Menge der Punkte* $\mathfrak{z}$, *zu denen es ein Flächenelement* $(\mathfrak{z}_0; h)$ *aus* $\hat{\mathfrak{N}}$ *mit* $\sum_{\nu=1}^{n} h_{z_\nu}(\mathfrak{z}_0)\, z_\nu^{(0)} = 0$ *gibt, eine auf* $\hat{\mathfrak{N}}$ *abgeschlossene Nullmenge.*

Beweis. Zum Flächenelement $(\mathfrak{z}_0; h)$ von $\hat{\mathfrak{N}}$ werde $\delta > 0$ so klein gewählt, daß die Gleichung $h(\mathfrak{z}) = 0$ sich in $U(\mathfrak{z}_0) = [|z_\nu - z_\nu^{(0)}| < \delta,\ \nu = 1, \ldots, n]_{\mathfrak{z}}$ nach einem z_ν, etwa z_1, durch $z_1 = \varphi(\mathfrak{x})$ mit $\mathfrak{x} = (z_2, \ldots, z_n)$ eindeutig auflösen läßt, wobei $\mathfrak{x}$ die Menge $U'(\mathfrak{z}_0) = [|z_\nu - z_\nu^{(0)}| < \delta$ für $\nu = 2, \ldots, n]_{\mathfrak{x}}$ durchläuft, daß ferner $h_{z_1} \neq 0$ in $U(\mathfrak{z}_0)$ ist, und daß $U(\mathfrak{z}_0) \cap [h(\mathfrak{z}) = 0]_{\mathfrak{z}} = U(\mathfrak{z}_0) \cap \hat{\mathfrak{N}}$ gilt. Ist nun $\hat{\mathfrak{N}}$ sternförmig, so ist $h(\lambda\,\mathfrak{z}) = h(\mathfrak{z}) = 0$ für jeden Punkt $\mathfrak{z} \in \hat{\mathfrak{N}} \cap U(\mathfrak{z}_0)$ und $\lambda - 1 < \varepsilon$. Auf $\hat{\mathfrak{N}} \cap U(\mathfrak{z}_0)$ folgt $\frac{\partial}{\partial \lambda} h(\lambda\,\mathfrak{z})_{|\lambda=1} = \sum_{\nu=1}^{n} h_{z_\nu}(\mathfrak{z})\, z_\nu = 0$. Wird umgekehrt vorausgesetzt, daß es einen Punkt $\mathfrak{z}_2 \in U(\mathfrak{z}_0) \cap \hat{\mathfrak{N}}$ und ein $\eta > 0$ gibt, so daß $\sum_{\nu=1}^{n} h_{z_\nu} \cdot z_\nu$ längs der Menge $[h(\mathfrak{z}) = 0]_{\mathfrak{z}} \cap [|z_\nu - z_\nu^{(2)}| < \eta$ für $\nu = 1, \ldots, n]_{\mathfrak{z}} \subseteq U(\mathfrak{z}_0)$ identisch verschwindet, so gelten in der Menge $[|z_\nu - z_\nu^{(2)}| < \eta$ für $\nu = 2, \ldots, n]_{\mathfrak{x}}$ die Gleichungen:

$$(3.27) \qquad h_{z_1}\varphi + \sum_{\nu=2}^{n} h_{z_\nu} \cdot z_\nu = 0 \quad \text{und} \quad h_{z_1}\varphi_{z_\nu} + h_{z_\nu} = 0.$$

Die Gln. (3.27) gelten dann auch in $U'(\mathfrak{z}_0)$. Zu jedem Punkt $\mathfrak{x} \in U'(\mathfrak{z}_0)$ gibt es ein $\varepsilon = \varepsilon(\mathfrak{x}) > 0$, so daß für $|\lambda - 1| < \varepsilon(\mathfrak{x})$ gilt:

$$(3.28) \qquad \varphi(\lambda\,\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=2}^{n} \varphi_{z_\nu}(\lambda\,\mathfrak{x}) \cdot \lambda\, z_\nu = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(\lambda\,\mathfrak{x}) \quad \text{d.h.} \quad \lambda\varphi(\mathfrak{x}) - \varphi(\lambda\,\mathfrak{x}).$$

Daher ist $U(\mathfrak{z}_0) \cap \hat{\mathfrak{N}}$ sternförmig. Wenn zum Flächenelement $(\mathfrak{z}_1; h_1)$ ganz entsprechend die Umgebung $U(\mathfrak{z}_1)$ bestimmt wird, und wenn der Durchschnitt $U(\mathfrak{z}_0) \cap U(\mathfrak{z}_1) \cap \hat{\mathfrak{N}}$ nicht leer ist, so ist die offene Teilmenge $U(\mathfrak{z}_0) \cap U(\mathfrak{z}_1) \cap \hat{\mathfrak{N}}$ von $U(\mathfrak{z}_1)$ sternförmig. Längs ihr verschwindet $\sum_{\nu=1}^{n} h_{1\,z_\nu} \cdot z_\nu$ identisch, also ist $U(\mathfrak{z}_1) \cap \hat{\mathfrak{N}}$ sternförmig. Die zusammenhängende Mannigfaltigkeit $\hat{\mathfrak{N}}$ ist daher

ebenfalls sternförmig. Ist $\mathfrak{R}$ sternförmig, $(\mathfrak{z}_0; h)$ ein Flächenelement von $\hat{\mathfrak{R}}$, so werden $U(\mathfrak{z}_0)$ und φ wie oben bestimmt. Da der Punkt $\mathfrak{z}_0$ vom Ursprung verschieden ist, gibt es nach (3.28) ein $z_\nu^{(0)} \neq 0$ für $\nu \geqq 2$, etwa $z_2^{(0)} \neq 0$. Die Umgebung $U(\mathfrak{z}_0)$ werde so verkleinert, daß $z_2 \neq 0$ auf $U(\mathfrak{z}_0)$ ist. Setzt man $\mathfrak{y}(u_3, \ldots, u_n) = \varphi(1, u_3, \ldots, u_n)\, \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \sum_{\nu=3}^{n} u_\nu \mathfrak{e}_\nu$, so wird durch $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) = u_2 \mathfrak{y}(u_3, \ldots, u_n)$ eine Parameterdarstellung der Fläche $\hat{\mathfrak{R}} \cap U(\mathfrak{z}_0)$ gegeben. Da $\mathfrak{y}$ nur von $(2n-4)$ Parametern abhängt, verschwindet $\partial \omega_{2n-2}(\mathfrak{z}(\mathfrak{u})) = \partial \omega_{2n-2}(\mathfrak{y}) = 0$ identisch. Die Behauptungen a) und b) sind bewiesen. In c) kann man für alle Punkte einer Umgebung von $\mathfrak{z}_0$ dieselbe Funktion h wählen. Daher besteht N_1 nach dem zweiten WEIERSTRASSschen Satz aus höchstens abzählbar vielen, komplexen Teilmannigfaltigkeiten mit Dimensionen $2k < 2n-2$. Also ist N_1 eine abgeschlossene Nullmenge, w. z. b. w.

Satz 9. Eine Integralumformung.

Voraussetzung. *Die Nullstellenfläche $\mathfrak{R}$ habe die Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$. Die Funktion $\psi(\mathfrak{z})$ sei auf $\mathfrak{R}_{r_0 r}$ mit $0 \leqq r_0 < r \leqq \infty$ meßbar.*

Behauptung. *Wenn in der folgenden Gl.* (3.29) *wenigstens eines der beiden Integrale für $|\psi|$ statt ψ existiert, so existieren beide für ψ. Es ist*

$$(3.29) \qquad \int_{\mathfrak{R}_{r_0 r}} \nu(\mathfrak{z})\, \psi(\mathfrak{z})\, \partial \omega_{2n-2}(\mathfrak{z}) = \int_{\mathfrak{a} \in Q} \Big\{ \sum_{r_0 < |z| < r} \nu(z; \mathfrak{a})\, \psi(z\, \mathfrak{a}) \Big\}\, \partial \omega_{2n-2}$$ [18])

Beweis. Für $r_1 > 0$ ist $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R} - \mathfrak{R}_{0 r_1}$ eine Nullstellenfläche, die nicht durch den Ursprung geht. Es sei $\mathfrak{R}^{(1)}$ die Vereinigung der sternförmigen irreduziblen Nullstellenflächen aus $\mathfrak{R}^*$. Die Darstellung Q des projektiven Raumes $\mathfrak{P}^{2n-2}$ sei wie in § 3 b bestimmt. Die Projektion von $\mathfrak{R}^{(1)}$ auf Q ist eine Nullmenge. Zu den irreduzibeln Teilen der Nullstellenfläche $\mathfrak{R}^* - \mathfrak{R}^{(1)}$ werden die Nullmengen von Hilfssatz 5 c bestimmt, deren Vereinigung N_1^* sei. Die Projektion der Menge $L = \{\mathfrak{R}^{(1)} \cup N_1^* \cup (\mathfrak{R} - \hat{\mathfrak{R}}) \cup [z_n = 0]_\mathfrak{z}\} \cap [r_1 \leqq |\mathfrak{z}| \leqq r]_\mathfrak{z}$ in Q ist eine Nullmenge. Da das Differential $\partial \omega_{2n-2}$ längs $\mathfrak{R}^{(1)}$ verschwindet, gilt:

$$(3.30) \qquad \int_L \nu(\mathfrak{z})\, \psi(\mathfrak{z})\, \partial \omega_{2n-2}(\mathfrak{z}) = 0 \qquad \int_{\mathfrak{a} \in Q} \Big\{ \sum_{z\, \mathfrak{a} \in L} \nu(z; \mathfrak{a})\, \psi(z\, \mathfrak{a}) \Big\}\, \partial \omega_{2n-2}.$$

Auf die komplexe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{R}^* \quad L\} \cap [r_1 < |\mathfrak{z}| < r]_\mathfrak{z}$ wird Satz 6 angewandt. Zu jedem Punkt $\mathfrak{z}_0 \in \mathfrak{M}$ gibt es eine Umgebung $U(\mathfrak{z}_0)$ mit $U(\mathfrak{z}_0) \cap L = \mathfrak{o}$ und eine in $U(\mathfrak{z}_0)$ reguläre Funktion $h(\mathfrak{z})$ mit $\sum_{\nu=1}^{n} h_{z_\nu}(\mathfrak{z})\, z_\nu \neq 0$ auf $U(\mathfrak{z}_0)$, $[h(\mathfrak{z}) = 0]_\mathfrak{z} = U(\mathfrak{z}_0) \cap \mathfrak{M}$. Setzt man $z_\nu = x_\nu u$ für $\nu = 1, \ldots, n-1$ und $z_n = u$, definiert man $g(\mathfrak{x}, u) = h(u\, x_1, \ldots, u\, x_{n-1}, u)$, so ist $g_u = \sum_{\nu=1}^{n-1} h_{z_\nu} \cdot x_\nu + h_{z_n} \neq 0$ längs $\mathfrak{M} \cap U(\mathfrak{z}_0)$. Die Gleichung $g(\mathfrak{x}, u) = 0$ läßt sich also nach u durch $u = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \varphi(\mathfrak{x})$ auflösen. Man setzt $\mathfrak{y}(\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \varphi(\mathfrak{x})\, x_\nu \mathfrak{e}_\nu + \varphi(\mathfrak{x})\, \mathfrak{e}_n$,

[18]) Zu $\nu(z; \mathfrak{a})$ vergleiche S. 144 unten.

sowie $x_\nu = w_{2\nu-1} + i\, w_{2\nu}$ für $\nu = 1, \ldots, n-1$. Es sei $\mathfrak{y}(\mathfrak{x}_0) = \mathfrak{z}_0$. Wählt man $U(\mathfrak{z}_0)$ hinreichend klein, so wird durch die Abbildung $\gamma(\mathfrak{w}) = \mathfrak{y}(\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_0) \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{z}_0}(\mathfrak{M})$ die Umgebung $U(\mathfrak{z}_0|\gamma) = U(\mathfrak{z}_0) \cap \mathfrak{M}$ uniformisiert. Durch $\sigma(\mathfrak{z}) = \mathfrak{q} = z^{-1}\mathfrak{z}$ mit $z = \frac{z_n}{|z_n|}\,|\mathfrak{z}|$ wird der Punkt $\mathfrak{z}$ in Q projiziert. Definiert man die reellanalytische Mannigfaltigkeit Q_n wie in § 3 b, setzt man $v_\nu = t_{2\nu-1} + i\, t_{2\nu}$ für $\nu = 1, \ldots, n-1$ und ist $\mathfrak{r} = \sigma(\mathfrak{z}_0) = \mathfrak{a}(\mathfrak{v}_0)$, so wird Q_n durch $\alpha(\mathfrak{t}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_0) \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{r}}(Q_n)$ uniformisiert. Nun hat man

$$\sigma\,\mathfrak{y}(\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_0) = \frac{|\varphi(\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_0)|}{|\mathfrak{y}(\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_0)|}\left\{\sum_{\nu=1}^{n-1}(x_\nu + x_\nu^{(0)})\,\mathfrak{e}_\nu + \mathfrak{e}_n\right\} = \mathfrak{q}$$

und

$$\mathfrak{v} = \alpha^{-1}\sigma\gamma = \sum_{\nu=1}^{n-1}\left(\frac{q_\nu}{q_n} - \frac{r_\nu}{r_n}\right)\mathfrak{e}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n-1}\{(x_\nu + x_\nu^{(0)}) - x_\nu^{(0)}\}\,\mathfrak{e}_\nu = \mathfrak{x}.$$

Die Identität $\alpha^{-1}\sigma\gamma$ hat eine positive Funktionaldeterminante. $h(\mathfrak{z})$ und $h(z\,\mathfrak{a})$ haben auf $\mathfrak{M}$ nur einfache Nullstellen. Setzt man $\mathfrak{z} = z\,\mathfrak{a} = Q$ und $P = \mathfrak{a}$, so gilt also $\nu(\mathfrak{z}) = \nu(\mathfrak{z})\,\nu(P, Q) = \nu(z; \mathfrak{a})$. Setzt man $\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_0 = \mathfrak{a}^{-1}(\mathfrak{q})$ und $z(\mathfrak{q}) = \frac{\varphi(\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_0)}{|\varphi(\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_0)|}\,|\mathfrak{y}(\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_0)|$, schreibt man $S = \mathfrak{z}_0$, so ist die örtliche Umkehrung von σ die Abbildung $\sigma_S{}^{-1}(\mathfrak{q}) = z(\mathfrak{q})\,\mathfrak{q}$. Ist $\sigma(S) = \sigma(T)$, so ist $\partial\omega_{2n-2}(\sigma_S^{-1}(\mathfrak{q})) = \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{q}) = \partial\omega_{2n-2}(\sigma_T^{-1}(\mathfrak{q}))$. Wegen (3.30) ist entweder $\nu(\mathfrak{z})|\psi|\,\partial\omega_{2n-2}$ über $\mathfrak{M}$ oder $\sum_{z\,\mathfrak{a}\in\mathfrak{M}} \nu(z; \mathfrak{a})|\psi|\,\partial\omega_{2n-2}$ über Q integrierbar. Die Voraussetzungen von Satz 6 sind erfüllt. Mit (3.30) und (2.21) erhält man

$$\int_{\mathfrak{M}_{r_1 r}} \psi(\mathfrak{z})\,\partial\omega_{2n-2} = \int_Q \left\{\sum_{r_1 < |z| < r} \nu(z; \mathfrak{a})\,\psi(z\,\mathfrak{a})\right\}\partial\omega_{2n-2}; \tag{3.31}$$

denn $\mathfrak{M}_{rr}$ und $\mathfrak{M}_{r_1 r_1}$ sind Nullmengen. Ist $r_0 > 0$, so sei $r_0 = r_1$. Wenn $r_0 = 0$ ist, so gilt (3.31) auch für $|\psi|$ statt ψ. Läßt man $r_1 \to 0$ streben, so erhält man (3.31) nach Satz 4 auch für $r_1 = 0$. Nachträglich kann man nach Satz 4,1 den Grenzübergang auch für ψ statt $|\psi|$ ausführen, w. z. b. w.

Hilfssatz 6. *Wenn die Funktion $f \not\equiv 0$ und meromorph im Gebiet G ist, so ist der Quotient $|f_{z_\mu} f^{-1}|$ über jeden kompakten Teil des Gebietes G integrierbar.*

Beweis. Es reicht, zu jedem Punkt $\mathfrak{z}_0 \in G$ eine Umgebung anzugeben, über die $|f_{z_\mu} f^{-1}|$ integrierbar ist. Dabei darf man noch die Funktion f regulär voraussetzen. Ist $f(\mathfrak{z}_0) \neq 0$, so gibt es sicher eine solche Umgebung. Ist $f(\mathfrak{z}_0) = 0$, so kann man das Koordinatensystem so wählen, daß bezüglich jeder Koordinate z_μ der Vorbereitungssatz anwendbar ist. Für $\mu = n$ gibt es beispielsweise ein $\varepsilon > 0$, ein $\delta > 0$, eine ganze Zahl q, Funktionen $a_\varrho(z_1, \ldots, z_{n-1})$ mit $|z_n^{(0)} - a_\varrho| < \varepsilon$ für alle $|z_\nu - z_\nu^{(0)}| \leq \delta$ für $\nu = 1, \ldots, n-1$ und eine Funktion $g(\mathfrak{z})$, die bei festem $z_1, \ldots, z_{n-1}$ mit $|z_\nu - z_\nu^{(0)}| \leq \delta$ in $|z_n - z_n^{(0)}| \leq 2\varepsilon$ analytisch ist. Es gilt in $|z_\nu - z_\nu^{(0)}| \leq \delta$ für $\nu = 1, \ldots, n-1$ und $|z_n - z_n^{(0)}| \leq 2\varepsilon$ die Gleichung:

$$f_{z_n} f^{-1} = \sum_{\varrho=1}^{q} (z_n - a_\varrho)^{-1} + g(\mathfrak{z}). \tag{3.32}$$

Das Maximum von $|f_{z_n} f^{-1}$ auf der Mantelfläche $[|z_\nu - z_\nu^{(0)}| \leqq \delta$, für $\nu = 1, \ldots, n-1$ und $|z_n - z_n^{(0)}| = 2\varepsilon]_\mathfrak{z}$ sei M. Da $|g(\mathfrak{z})|$ sein Maximum auf dem Rand annimmt, gilt in dem Polyzylinder $U_n = [|z_\nu - z_\nu^{(0)}| \leqq \delta$ für $\nu = 1, \ldots, n-1$ und $|z_n - z_n^{(0)}| \leqq 2\varepsilon]_\mathfrak{z}$ die Abschätzung $|g(\mathfrak{z})| \leqq M + q\,\varepsilon^{-1} = M_1$. Ist K der Kreis $[|z_n - z_n^{(0)}| \leqq 2\varepsilon]_{z_n}$ und K_ϱ der Kreis $[|z_n - a_\varrho| < 4\varepsilon]_{z_n}$, so gilt:

$$\int_K |f_{z_n} f^{-1}|\, dz_n\, d\bar{z}_n \leqq M_1\, 4\pi\, \varepsilon^2 + \sum_{\varrho=1}^{q} \int_{K_\varrho} |z_n - a_\varrho|^{-1}\, dz_n\, d\bar{z}_n$$

$$\leqq 4\pi\, \varepsilon^2 M_1 + 8\pi\, \varepsilon\, q = M_2,$$

$$\int_{U_n} |f_{z_n} f^{-1}|\, \partial v_{2n} \leqq M_2\, (\pi\, \delta^2)^{n-1}.$$

Entsprechend beweist man die Integrierbarkeit von $|f_{z_\mu} f^{-1}|$ über eine Umgebung U_μ für jedes $\mu = 1, \ldots, n-1$. Über den Durchschnitt $\bigcap_{\mu=1}^{n} U_\mu$ sind alle $|f_{z_\mu} f^{-1}|$ integrierbar. Diese Aussage ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystemes, w. z. b. w.

Hilfssatz 7.

Voraussetzung. *Die Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ im Gebiet G habe die Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$. Die Funktion $\psi(\mathfrak{z})$ sei auf der meßbaren Menge $M \subseteqq \mathfrak{N}$ meßbar. $\nu_n(\mathfrak{z})$ sei wie auf S. 144 erklärt. In der folgenden Gl. (3.33) existiere wenigstens eines der beiden Integrale für $|\psi|$ statt ψ.*

Behauptung. *Ist Z der Raum der Veränderlichen $z_1, \ldots, z_{n-1}$, so gilt:*

$$(3.33)\quad \int_M \psi(\mathfrak{z})\, \partial z_1\, \partial \bar{z}_1 \ldots \partial z_{n-1}\, \partial \bar{z}_{n-1} = \int_Z \Big\{ \sum_{\mathfrak{z} \in M} \nu_n(\mathfrak{z})\, \psi(\mathfrak{z}) \Big\}\, \partial z_1\, \partial \bar{z}_1 \ldots \partial z_{n-1}\, \partial \bar{z}_{n-1}.$$

Beweis. Zu jedem gewöhnlichen Punkt $\mathfrak{z}_0 \in \hat{\mathfrak{N}}$ gibt es eine Umgebung $U(\mathfrak{z}_0)$ und eine dort reguläre, in $\mathfrak{z}_0$ irreduzible Funktion $h(\mathfrak{z})$ mit $U(\mathfrak{z}_0) \cap [h(\mathfrak{z}) = 0]_\mathfrak{z} = U(\mathfrak{z}_0) \cap \hat{\mathfrak{N}}$. Der Punkt $\mathfrak{z}_0$ gehöre dann und nur dann zur Menge A, wenn $h_{z_n} \equiv 0$ längs $\hat{\mathfrak{N}} \cap U(\mathfrak{z}_0)$ ist. In diesem Fall läßt sich die Gleichung $h(\mathfrak{z}) = 0$ nach einem z_ν mit $\nu < n$, etwa z_1, durch $z_1 = \varphi(z_2, \ldots, z_n)$ auflösen, wobei $h_{z_1} \neq 0$ ist. Aus $h(\varphi, z_2, \ldots, z_n) \equiv 0$ folgt $h_{z_1} \varphi_{z_n} \equiv 0$ d. h. $\varphi_{z_n} \equiv 0$. Da φ nicht von z_n abhängt, steht die Menge A senkrecht auf der Ebene $[z_n = 0]$. Setzt man $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) = (z_1, \ldots, z_{n-1})$, so ist die Projektion $\dot{A}$ von A in den $\underset{\sim}{x}$-Raum eine Nullmenge. Das Differential $\partial z_1\, \partial \bar{z}_1 \ldots \partial z_{n-1}\, \partial \bar{z}_{n-1}$ verschwindet längs A.

Der Punkt $\mathfrak{z}_0 \in \hat{\mathfrak{N}}$ gehöre dann und nur dann zu B, wenn $h_{z_n}(\mathfrak{z}_0) = 0$ aber $h_{z_n}(\mathfrak{z}) \not\equiv 0$ längs $U(\mathfrak{z}_0) \cap \hat{\mathfrak{N}}$ ist. Verkleinert man die Umgebung $U(\mathfrak{z}_0)$ genügend, so ist $U(\mathfrak{z}_0) \cap B = U(\mathfrak{z}_0) \cap [h_{z_n}(\mathfrak{z}) = 0] \cap [h(\mathfrak{z}) = 0]$. Dieser Durchschnitt ist eine Nullmenge. Nach dem zweiten WEIERSTRASSschen Satz besteht er, also auch seine Projektion $\dot{B}^*$ in den Raum Z, aus endlich vielen komplexen Teil-

mannigfaltigkeiten mit Dimensionen $2k < 2n-2$. Daher ist $\dot{B}^*$ eine Nullmenge im Raum Z, woraus dasselbe für die Projektion $\dot{B}$ von B folgt.

Ebenso ist die Projektion $\dot{C}$ von $C = \mathfrak{N} - \hat{\mathfrak{N}}$ eine Nullmenge. Liegt der Punkt $\mathfrak{z}_0$ in $\mathrm{N} - A - B - C = D$, so läßt sich die Gleichung $h = 0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung $U(\mathfrak{z}_0)$ durch eine analytische Funktion $z_n = \xi(\mathfrak{x})$ nach z_n auflösen. Man setzt $\mathfrak{y}(\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=1}^{n-1} x_\nu \mathfrak{e}_\nu + \xi(\mathfrak{x})\,\mathfrak{e}_n$, sowie $x_\nu = w_{2\nu-1} + i\,w_{2\nu}$ für $\nu = 1, \ldots, n-1$. Es sei $\mathfrak{y}(\mathfrak{x}_0) = \mathfrak{z}_0$. Wählt man $U(\mathfrak{z}_0)$ hinreichend klein, so wird durch die Abbildung $\gamma(\mathfrak{w}) = \mathfrak{y}(\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_0) \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{z}_0}(\hat{\mathfrak{N}})$ die Umgebung $U(\mathfrak{z}_0|\gamma) = U(\mathfrak{z}_0) \cap \hat{\mathfrak{N}}$ uniformisiert. Durch $\mathfrak{x} = \sigma(\mathfrak{z}) = \sum_{\nu=1}^{n-1} z_\nu \mathfrak{e}_\nu$ wird der Punkt $\mathfrak{z}$ in den $\mathfrak{x}$-Raum Z projiziert. Der Raum Z wird durch $\alpha(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + \mathfrak{x}_0 \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{x}_0}(Z)$ uniformisiert. Dann ist $\alpha^{-1}\sigma\gamma(\mathfrak{w}) = \alpha^{-1}\sigma\,\mathfrak{y}(\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_0) = \mathfrak{x}$ die Identität. Sie besitzt eine positive Funktionaldeterminante. $h(\mathfrak{z})$ und $h(\mathfrak{x}, z_n)$ haben auf $U(\mathfrak{z}_0) \cap \hat{\mathfrak{N}}$ nur einfache Nullstellen. Setzt man $Q = \mathfrak{z} = \mathfrak{x} + z_n \mathfrak{e}_n$ und $P = \mathfrak{x}$, so gilt mit den Bezeichnungen von Satz 6 $\nu(\mathfrak{z}) = \nu(\mathfrak{z}) \cdot \nu(P, Q) = \nu_n(\mathfrak{z})$. Schreibt man $S = \mathfrak{z}_0$, so ist die Abbildung $\sigma_S^{-1}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{y}(\mathfrak{x})$ die örtliche Umkehrung von σ. Ist $\sigma(S) = \sigma(T)$, so ist $\sigma_S^{-1}(\partial z_1\, \partial \bar{z}_1 \ldots \partial z_{n-1}\, \partial \bar{z}_{n-1}) = \partial x_1\, \partial \bar{x}_1 \ldots \partial x_{n-1}\, \partial \bar{x}_{n-1} = \sigma_T^{-1}(\partial z_1\, \partial \bar{z}_1 \ldots \partial z_{n-1}\, \partial \bar{z}_{n-1})$. Die Voraussetzungen von Satz 6 sind erfüllt. Man erhält

$$(3.34)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{M \cap D} \psi(\mathfrak{z})\, \partial z_1\, \partial \bar{z}_1 \ldots \partial z_{n-1}\, \partial \bar{z}_{n-1} \\ \displaystyle = \int_{|\mathfrak{x}| < \infty} \Big\{ \sum_{(\mathfrak{x}, z_n) \in M} \nu_n(\mathfrak{x}, z_n)\, \psi(\mathfrak{x}, z_n) \Big\}\, \partial x_1\, \partial \bar{x}_1 \ldots \partial x_{n-1}\, \partial \bar{x}_{n-1}. \end{cases}$$

Da die entsprechenden Integrale über $M \cap (A \cup B \cup C)$ verschwinden, folgt unmittelbar die Behauptung (3.33), w. z. b. w.

Ein Integral über den Durchschnitt $M_{rs} = M \cap [r \leqq |\mathfrak{z}| \leqq s]$ werde mit $\int_{rM}^{s}$ bezeichnet.

Satz 10. Integralumformung.

Voraussetzung. *Die Funktionen $g(\mathfrak{z})$ und $f(\mathfrak{z})$ seien in $|\mathfrak{z}| < R \leqq \infty$ analytisch. Die Vielfachheit der Nullstelle $\mathfrak{z}$ bezüglich f sei $\nu(\mathfrak{z})$. Die Nullstellenfläche der Funktion f sei $\mathfrak{N}$.*

Behauptung. *Für r in $0 < r < R$ gilt:*

$$(3.35)\qquad \frac{1}{V_{2n-2}(r)} \int_{0\mathfrak{N}}^{r} \nu(\mathfrak{z})\, g(\mathfrak{z})\, \partial v_{2n-2} = \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{0\mathfrak{N}}^{r} \nu(\mathfrak{z})\, g(\mathfrak{z})\, \partial \omega_{2n-2} + \nu(0)\, g(0).$$

Beweis. Es sei $f'(\mathfrak{z}) = \sum_{\nu=1}^{n} f_{z_\nu} \cdot z_\nu$ und $\dot{f}(z\,a) = \frac{\partial}{\partial z} f(z\,a)$. Nach Hilfssatz 6 ist die Funktion $f^{-1} f' g$ über jede Kugel $[|\mathfrak{z}| \leqq r < R]$ integrierbar. Nach Satz 7 ist sie für fast alle r über den Kugelrand $[|\mathfrak{z}| = r]$ integrierbar. Aus

(3.19), (3.22), Satz 7 und 9 folgt:

$$
(3.36)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{V_{2n-1}(r)}\int_{|\mathfrak{z}|=r} g(\mathfrak{z})\,\frac{f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})}\,\partial v_{2n-1} = \frac{1}{W_{2n-2}}\int_{\mathfrak{a}\in Q}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\,\frac{f'(r e^{i\varphi}\mathfrak{a})}{f(r e^{i\varphi}\mathfrak{a})}\,d\varphi\right\}\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{a})\\
&\quad=\frac{1}{W_{2n-2}}\int_{\mathfrak{a}\in Q}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} g\,\frac{\dot f(z\mathfrak{a})}{f(z\mathfrak{a})}\,dz\right\}\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{a})\\
&\quad=\frac{1}{W_{2n-2}}\int_{\mathfrak{a}\in Q}\left\{\sum_{0<|z|\le r}\nu(z;\mathfrak{a})\,g(z\mathfrak{a})\right\}\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{a})+\nu(0)\,g(0)\ ^{19})\\
&\quad=\frac{1}{W_{2n-2}}\int_{0\mathfrak{R}}^{r}\nu(\mathfrak{z})\,g(\mathfrak{z})\,\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z})+\nu(0)\,g(0).
\end{aligned}\right.
$$

Diese Rechnung gilt zunächst für $g\equiv 1$. Daraus folgt die Existenz des Integrales $\int_{0\mathfrak{R}}^{r}\nu(\mathfrak{z})\,\partial\omega_{2n-2}$. Dann existiert aber das letzte Integral in (3.36) für g und $|g|$. Also gilt (3.36) für eine beliebige analytische Funktion g.

Der Quotient $z_\mu\frac{f_{z_\mu}g}{f}$ ist für fast alle r über $|\mathfrak{z}|\le r$ integrierbar. Ist $\mathfrak{a}\in Q$ und $\mathfrak{z}=z\,\mathfrak{a}$, so gilt längs des Kugelrandes $|\mathfrak{z}|=r$

$$
\begin{aligned}
f_{z_\mu}\cdot z_\mu\,\partial v_{2n-1}(\mathfrak{z}) &= r^{2n-1} f_{z_\mu}\,z\,a_\mu\,\partial\varphi\,\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{a})\\
&= -i\,r^{2n-1} f_{z_\mu}\,\partial(z\,a_\mu)\,\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{a})\\
&= -i\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} r\,f_{z_\mu}\,\partial z_\mu\,\partial z_1\,\partial\bar z_1\dots\overset{\mu}{\|}\dots\partial z_n\,\partial\bar z_n.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt z.B. für $\mu=n$ und $\mathfrak{x}=(z_1,\dots,z_{n-1})$ mit $\varrho=\sqrt{r^2-|\mathfrak{x}|^2}$ die Umformung

$$
(3.37)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{V_{2n-1}(r)}\int_{|\mathfrak{z}|=r} g\,\frac{f_{z_n}}{f}\cdot z_n\,\partial v_{2n-1}\\
&\quad=\frac{1}{V_{2n-2}(r)}\int_{|\mathfrak{z}|=r}\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} g f^{-1} f_{z_n}\,\partial z_n\,\partial z_1\,\partial\bar z_1\dots\partial z_{n-1}\,\partial\bar z_{n-1}\\
&\quad=\frac{1}{V_{2n-2}(r)}\int_{|\mathfrak{x}|<r}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|z_n|=\varrho} g f^{-1} f_{z_n}\,dz_n\right\}\partial v_{2n-2}(\mathfrak{x})\\
&\quad=\frac{1}{V_{2n-2}(r)}\int_{|\mathfrak{x}|<r}\left\{\sum_{|z_n|\le\varrho}\nu_n(\mathfrak{x},z_n)\,g(\mathfrak{x},z_n)\right\}\partial v_{2n-2}(\mathfrak{x})\\
&\quad=\frac{1}{V_{2n-2}(r)}\int_{0\mathfrak{R}}^{r}\nu(\mathfrak{z})\,g(\mathfrak{z})\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\partial z_1\,\partial\bar z_1\dots\partial z_{n-1}\,\partial\bar z_{n-1}.
\end{aligned}\right.
$$

Diese Rechnung gilt zunächst für $g\equiv 1$. Daraus folgt die Existenz des Integrales $\int_{0\mathfrak{R}}^{r}\nu(\mathfrak{z})\,\partial z_1\,\partial\bar z_1\dots\partial z_{n-1}\,\partial\bar z_{n-1}$. Dann existiert das letzte Integral in (3.37) auch für eine beliebige analytische Funktion g und $|g|$. Also gilt (3.37) allgemein. Entsprechende Formeln gelten für $\mu=1,\dots,n-1$. Aus (3.36)

[19]) Denn für fast alle $\mathfrak{a}\in Q$ ist $\nu(0;\mathfrak{a})=\nu(0)$.

und (3.37) folgt (3.35) für *fast* alle Werte r. Wählt man speziell $g \equiv 1$, so existieren beide Integrale in (3.35) für *alle* r in $0<r<R$, da die Differentiale ∂v_{2n-2} und $\hat{c}\omega_{2n-2}$ längs der Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ eine nichtnegative Dichte haben. Dann existieren aber beide Integrale in (3.35) für *jede* analytische Funktion g und für *jedes* r in $0<r<R$. Wegen $\int_{r\mathfrak{N}}^{r} = 0$ sind sie sogar stetig in r. Daher gilt (3.35) *allgemein*, w. z. b. w.

Satz 10 wurde von H. Kneser [6] § 3 für den Fall, daß $g \equiv 1$ und $\mathfrak{N}$ eine $2k$-dimensionale, komplexe Teilmannigfaltigkeit mit $2k \leq 2n-2$ ist, die in der Vollkugel $[|\mathfrak{z}|<R]$ abgeschlossen ist und nicht durch den Nullpunkt geht, bewiesen. Die Vollkugel $[|\mathfrak{z}|<R]$ ist ein Cousinsches Gebiet. Ist also die Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ in dieser Vollkugel abgeschlossen, so folgt die Existenz der in Satz 10 vorausgesetzten Funktionen f von selbst.

Mit Satz 10 ist der folgende, schon angekündigte Satz bereits im wesentlichen bewiesen.

Satz 11. Existenz von Integralen über Nullstellenflächen.

Voraussetzung. *Die Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ enthalte die kompakte Menge K. Die Menge der gewöhnlichen Punkte von $\mathfrak{N}$ sei $\hat{\mathfrak{N}}$. Die meßbare Menge M sei in $K \cap \hat{\mathfrak{N}}$ enthalten. Das Differential*

$$(3.38)\quad \left\{\begin{aligned} \partial\chi^{2n-2} = &\sum_{\substack{\mu,\nu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n} a_{\mu\nu}\,\partial\bar{z}_\mu\,\partial z_\nu\,\partial z_1\,\partial\bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots \overset{\nu}{\|} \ldots \partial z_n\,\partial\bar{z}_n \\ &+ \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\mu}\,\partial z_1\,\partial\bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots \partial z_n\,\partial\bar{z}_n \end{aligned}\right.$$

sei längs $\hat{\mathfrak{N}}$ meßbar auf M. Für $\mathfrak{z} \in M$ gelte die Abschätzung

$$(3.39)\qquad |a_{\mu\nu}(\mathfrak{z})| \leq L.$$

Behauptung. *Das Differential $\partial\chi^{2n-2}$ ist über die Menge M integrierbar.*

Beweis. Um jeden Punkt $\mathfrak{y} \in K$ gibt es eine Kugel U, so daß das Integral $\int_{K\cap U} \partial v_{2n-2}$ existiert. Wählt man den Punkt $\mathfrak{x} \in \hat{\mathfrak{N}} \cap K \cap U$ und die Abbildung $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{x}}(\hat{\mathfrak{N}})$ beliebig, ist χ die Dichte des Differentials $\partial\chi^{2n-2}$ und ψ die Dichte des Differentials ∂v_{2n-2} längs $\hat{\mathfrak{N}}$, so schätzt man ab:

$$\begin{aligned} |\chi| &\leq \sum_{\mu\neq\nu} |a_{\mu\nu}| \left|\frac{\partial\left(\bar{z}_\mu, z_\nu, z_1, \bar{z}_1, \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots \overset{\nu}{\|} \ldots, z_n, \bar{z}_n\right)}{\partial(u_1, \bar{u}_1, \ldots, u_{n-1}, \bar{u}_{n-1})}\right| + \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^{n} |a_{\mu\mu}| \left|\frac{\partial\left(z_1, \bar{z}_1, \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots, z_n, \bar{z}_n\right)}{\partial(u_1, \bar{u}_1, \ldots, u_{n-1}, \bar{u}_{n-1})}\right| \\ &\leq L \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left|\frac{\partial\left(z_1, \ldots \overset{\mu}{|} \ldots, z_n\right)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})}\right| \left|\frac{\partial\left(z_1, \ldots \overset{\nu}{|} \ldots, z_n\right)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})}\right| \\ &\leq n L \sum_{\mu=1}^{n} \left|\frac{\partial\left(z_1, \ldots \overset{\nu}{|} \ldots, z_n\right)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})}\right|^2 = n L \psi. \end{aligned}$$

Mit der Dichte ψ ist daher auch die Dichte χ über $M \cap K \cap U$ integrierbar. Mittels einer DIEUDONNÉ-Zerlegung der kompakten Teilmenge K von $\mathfrak{R}^{2n}$ folgt, daß χ über M integrierbar ist, w. z. b. w.

Satz 11 hätte man auch direkt beweisen können. Übrigens verschwinden alle Differentiale $\partial z_1 \partial z_2 \ldots \partial z_r \partial \bar{z}_1 \ldots \partial \bar{z}_s$ mit $r \neq s$ und $r + s = 2n - 2$ längs $\hat{\mathfrak{R}}$; denn die Parameterdarstellungen $z(u)$ sind analytisch.

Literatur.

[1] AHLFORS, L.: The theory of meromorphic curves. Acta Soc. Sci. fenn. nova, Ser. A **3**, 31 (1941). — [2] BOURBAKI, N.: Topologie générale. Utilisation des nombres réels en topologie générale. Paris: Hermann 1948. — [3] BEHNKE, H., u. P. THULLEN: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 3, S. 251—371. Berlin 1934. — [4] KÄHLER, H.: Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen. Hamburger math. Einzelschriften 16. H. 1934. — [5] KNESER, H.: Ordnung und Nullstellen bei ganzen Funktionen zweier Veränderlicher. Sonderausgabe a. d. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl. **31**, 19 (1936). — [6] KNESER, H.: Zur Theorie der gebrochenen Funktionen mehrerer Veränderlicher. Jber. D.M.V. **48**, 1—28 (1938). — [7] LORENTZ, G. G.: Beweis des Gaussschen Integralsatzes. Math. Z. **51**, 61 (1949). — [8] NEVANLINNA, R.: Eindeutige analytische Funktionen. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 46. 1936. — [9] OSGOOD, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 2, 2. Lieferung, 2. Auflage 1929. — [10] SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions, Bd. 1. 1950. — [11] WEIERSTRASS, K.: Werke Bd. 3. — [12] WEYL, H., and J. WEYL: Meromorphic curves. Ann. Math. (2) **39**, 516—538 (1938). — [13] WEYL, J.: Analytic curves. Ann. Math. (2) **42**, 371—408 (1941). — [14] WEYL, H., and J. WEYL: Meromorphic functions and analytic curves. Princeton university press 1943. (Annals of mathematics studies.)

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 9. Juni 1952.)

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften

Herausgegeben von **S. Flügge**, Marburg und **F. Trendelenburg**, Erlangen, unter Mitwirkung von W. Bothe, Heidelberg, F. Hund, Frankfurt a. M., P. Harteck, Hamburg.

Soeben erschien:

Sechsundzwanzigster Band

Mit 110 Abbildungen. III, 439 Seiten. 1952. DM 66.—; Ganzleinen DM 69.—

Inhaltsübersicht: **Elektromagnetische Wellenleiter.** Von Dr. R. Honerjäger, Frankfurt. — **Thermodynamisch-phänomenologische Theorie der irreversiblen Prozesse.** Von Dr. R. Haase, Marburg a. d. Lahn. — **Das Zwei-Nucleonen-Problem.** Von Professor Dr. S. Flügge, Marburg a. d. Lahn. — **Das Schalenmodell des Atomkerns.** Von Professor Dr. O. Haxel, Dr. J. H. D. Jensen und Dr. H. E. Suess, Heidelberg. — **Feldmechanik des Elektrons und der Elementarteilchen.** Von Professor Dr. H. Hönl, Freiburg. — **Die Theorie des Kristallwachstums.** Von Dr. O. Knacke und Professor Dr. I. N. Stranski, Berlin. — **Inhalt der Bände XI—XXVI.** — **Namen- und Sachverzeichnis.**

Früher erschienen:

Fünfundzwanzigster Band

Mit 345 Abbildungen und 32 Energieschemata, VII, 650 Seiten. 1951. DM 76.—; Ganzleinen DM 79.—

Inhaltsübersicht: **Hydrodynamisches Verhalten von Makromolekülen in Lösung.** Von Professor Dr. W. Kuhn, Professor Dr. H. Kuhn, Dr. P. Buchner, Basel. — **Schallgeschwindigkeit und Molekülstruktur in Flüssigkeiten.** Von Privatdozent Dr. W. Schaaffs, Berlin-Siemensstadt. — **Fehlordnungserscheinungen und Leitungsvorgänge in ionen- und elektronenleitenden festen Stoffen.** Von Professor Dr. K. Hauffe, Greifswald. — **Der elektrische Lichtbogen.** Von Privatdozent Dr. H. Maecker, Kiel. — **Dielektrisches Verhalten im Zusammenhang mit dem polaren Aufbau der Materie.** Von Professor Dr. F. H. Müller, Marburg a. d. Lahn und Privatdozent Dr. Chr. Schmelzer, Heidelberg. — **Theorie der elastischen Streuung von Korpuskeln an zusammengesetzten Atomkernen.** Von Professor Dr. S. Flügge, Marburg a. d. Lahn. — **Die Energieschemata der leichten Atomkerne.** Von Dr. U. Cappeller, Marburg a. d. Lahn.

Vierundzwanzigster Band

Mit 232 Abbildungen. III, 451 Seiten. 1951. DM 48.60

Inhaltsübersicht: **Spezifische Leuchtvorgänge im Bereich der mittleren Ionosphäre.** Von Professor Dr. C. Hoffmeister, Sonneberg. — **Elektroneninterferenzen und ihre Anwendung.** Von Professor Dr. H. Raether, Hamburg. — **Die Erforschung der Struktur hochmolekularer und kolloider Stoffe mittels Kleinwinkelstreuung.** Von Dr. R. Hosemann, Berlin. — **Experimentelle Grundlagen der Spektroskopie des Zentimeter- und Millimeter-Gebietes.** Von Dr. B. Koch, Weil a. Rhein. — **Die Mikrowellenspektren molekularer Gase und ihre Auswertung.** Von Dozent Dr. W. Maier, Freiburg i. Br. — **Spektroskopie der Gammastrahlen mit Kristallgittern.** Von Professor Dr. A. Faessler, Freiburg i. Br. — **Die genäherte Berechnung von Eigenwerten elastischer Schwingungen anisotroper Körper.** Von Dr. Hans J. Mähly, Zürich.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Statistische Urteilsbildung

Erläutert an Beispielen aus Medizin und Biologie. Von Dozent Dr. phil. habil. **H. Gebelein,** Landshut (Bayern), und Dr. med. **H.-J. Heite,** wissenschaftlicher Assistent an der Universitäts-Hautklinik Münster. Mit einem Geleitwort von Professor Dr. med. C. Moncorps, Direktor der Hautklinik der westfälischen Landesuniversität Münster. Mit 50 Abbildungen und 20 Beispielen. XVI, 192 Seiten. 1951. DM 15.60

Aus den Besprechungen: Durch das Zusammenwirken eines Statistikers und eines Mediziners ist hier ein Buch entstanden, das die Nutzbarmachung modernster statistischer Methoden für die Auswertung medizinischer und biologischer Untersuchungen vorführt. Auf die Ableitung der verwendeten statistischen Formeln und Sätze wird nur verwiesen, die Anwendung derselben ist mit den bescheidenen Mitteln möglich, über die jeder naturwissenschaftlich gebildete Leser verfügen muß. Dabei war es den Autoren nicht um eine Vollständigkeit der Methoden zu tun, die sich auf dem zur Verfügung stehenden Raum sowieso nicht hätte erreichen lassen, sondern um eine Auswahl von besonders charakteristischen Schlußweisen und deren praktische Anwendung. ... Einen breiten Raum nimmt die Korrelationsrechnung ein. Ein Kapitel ist den Prüffunktionen gewidmet. Die klare und saubere Darstellung lädt den Leser ein, sich durch das Studium der angeführten Literatur eine tiefere und umfassendere Einsicht in statistische Methoden anzueignen.

„Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft"

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit

Einführung in die neue Wahrscheinlichkeitslehre und ihre Anwendung. Von Professor **R. v. Mises,** Harvard University, Mass./USA. Dritte, neubearbeitete Auflage. IX, 278 Seiten. 1951. DM 18.—

Der quantitative Wahrscheinlichkeitsbegriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird unter betonter Distanzierung gegenüber allen metaphysischen Ansprüchen vom Standpunkt des exakten Naturwissenschaftlers entwickelt, wobei allerdings die Form der Darstellung unter Verzicht auf die mathematische Formelsprache in erster Linie für den Nichtmathematiker bestimmt ist.

SPRINGER-VERLAG / WIEN

Diesem Heft liegen zwei Prospekte des Springer-Verlages, Berlin - Göttingen - Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.